26.03.19

Избранные задачи геометрических олимпиад

Большинство задач этого занятия взято из городских устных олимпиад прошлых лет, но есть также задачи из заочных и финальных туров олимпиады имени И.Ф. Шарыгина, а также пара задач, близкие к ним «по духу». Некоторые задачи этих олимпиад, в основном, конструктивы, входили в подборки предыдущих занятий по стереометрии. Но несколько конструктивов естественным образом включены именно в это занятие.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. а) Какое наибольшее количество треугольных граней может иметь пятигранник?
б) Какое наименьшее количество вершин может иметь выпуклый многогранник, ровно три грани которого являются пятиугольниками?

2. Существует ли выпуклый многогранник, у которого:
а) количество диагоналей равно количеству ребер;
б) есть диагонали, и любая диагональ меньше любого ребра?

3. Верно ли, что существуют выпуклые многогранники с любым количеством диагоналей?

4. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях, как на основаниях, во внешнюю сторону построены правильные пирамиды $ABCD_1$, $ABDC_1$, $ACDB_1$ и $BCDA_1$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями ABC_1 и ACD_1.

5. Существует ли многогранник, у которого отношение площадей любых двух граней не меньше двух?

6. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$ с ребром 1. На его ребрах AB, BC, $C'D'$ и $D'A'$ отмечены точки K, L, M и N соответственно так, что $KLMN$ – квадрат. Найдите его площадь.

7. В кубе с ребром длины 1 провели два сечения в виде правильных шестиугольников. Найдите длину отрезка, по которому эти сечения пересекаются.

8. В пирамиду, основанием которой служит параллелограмм, вписана сфера. Докажите, что равны суммы площадей противоположных боковых граней этой пирамиды.

9. В тетраэдре $DABC$: $\angle ACB = \angle ADB$, $CD \perp (ABC)$. В треугольнике ABC дана высота h, проведенная к стороне AB, и расстояние d от центра описанной окружности до этой стороны. Найдите длину CD.

10. В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырехугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны и пересекаются в точке P, и SP является высотой пирамиды. Докажите, что проекции точки P на боковые грани пирамиды лежат на одной окружности.