25.12.18

Теорема об изогоналях

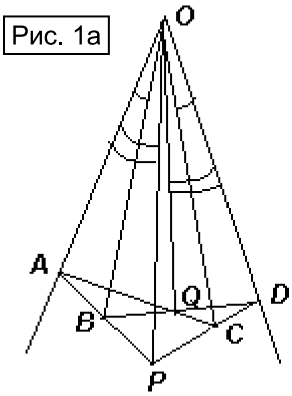
Использованы материалы одноименной статьи А. Куликовой и Д. Прокопенко, (см. http://www.geometry.ru/articles/isogonal_theorem_kvant_04_05.pdf.)

На этом занятии будет предложен ряд задач, многие из которых предлагались на различных олимпиадах в разные годы. Оказалось, что для их решения можно использовать один и тот же факт, который мы предварительно докажем.

Напомню, что прямые, проходящие через вершину угла и симметричные относительно его биссектрисы, называются ***изогоналями*** относительно этого угла.

Теорема об изогоналях. Пусть *OB* и *OC* изогонали угла *AOD*. Прямые *AC* и *BD* пересекаются в точке *Q*, а прямые *AB* и *CD* – в точке *P*. Тогда *OP* и *OQ* – также изогонали относительно угла *AOD* (см. рис. 1а).

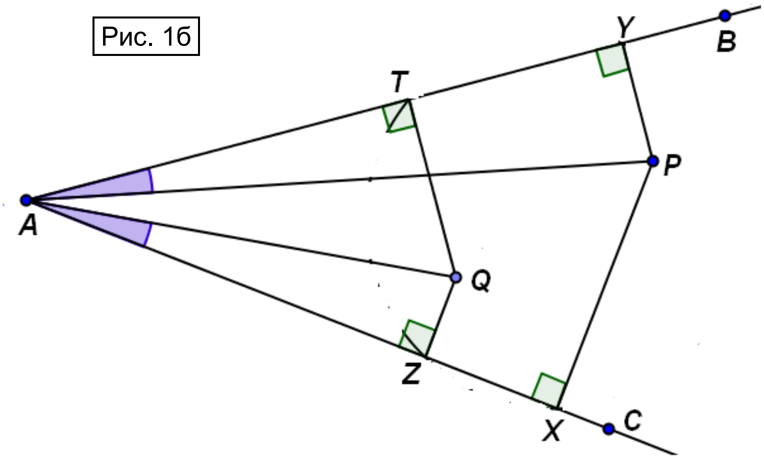
Рис. 1а



Доказательство. Предварительно докажем **лемму** (см. задачу 3а занятия «Педальные треугольники. Изогональное сопряжение»): Лучи *AP* и *AQ* – изогонали угла *BAC* тогда и только тогда, когда расстояния от точек *P* и *Q* до сторон угла обратно пропорциональны.

Доказательство леммы. Проведем перпендикуляры к сторонам угла из точек *P* и *Q*, введя обозначения так, как на рис. 1б. Если *AP* и *AQ* – изогонали, то $\angle PAB = \angle QAC$ и $\angle QAB = \angle PAC$. Из подобия треугольников *PAY* и *QAZ* следует, что $\frac{AP}{AQ} = \frac{PY}{QZ}$, а из подобия треугольников *PAX* и *QAT* следует, что $\frac{AP}{AQ} = \frac{PX}{QT}$. Тогда $\frac{PY}{PX} = \frac{QZ}{QT}$.

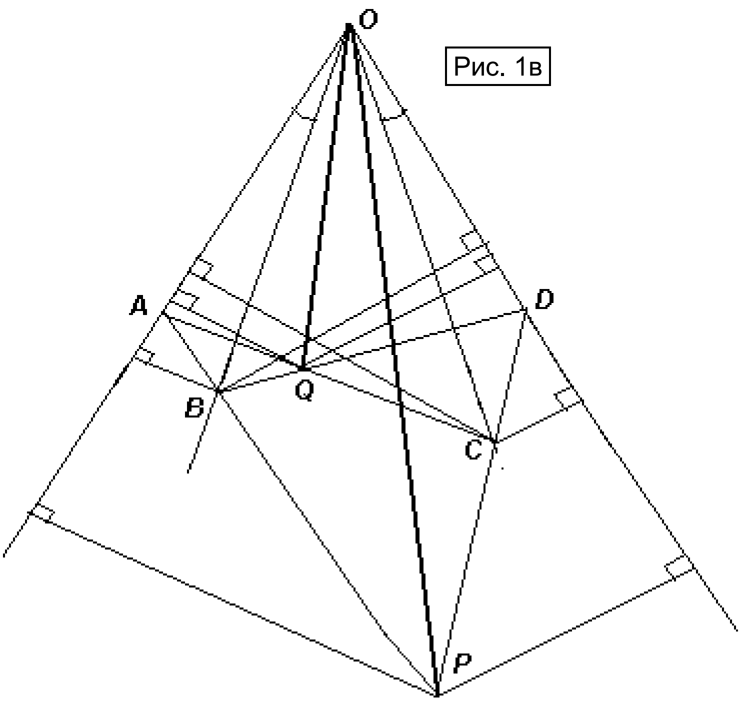
Рис. 1б



В обратную сторону рассуждаем от противного, зафиксировав, например точку *P*. Тогда, если *AQ* – не изогональ к *AP*, то левая часть равенства не изменяется, а правая – либо увеличивается, либо уменьшается.

Перейдем к доказательству теоремы. Проведем перпендикуляры к сторонам угла *AOD* из точек *B*, *C*, *P* и *Q*. Пусть x_P и y_P – расстояния от точки P до *OA* и *OD* соответственно. Аналогично будем обозначать расстояния до сторон угла от точек *B*, *C* и *Q* (см. рис. 1в). По лемме, условие изогональности *OP* и *OQ* равносильно выполнению равенства $\frac{x_P}{y_P} = \frac{y_Q}{x_Q} \Leftrightarrow \frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = 1$.

Рис. 1в



Из подобия четырех пар подобных треугольников получим:

$\frac{x_P}{x_B} = \frac{AP}{AB}$, $\frac{y_P}{y_C} = \frac{DP}{DC}$, $\frac{x_Q}{x_C} = \frac{AQ}{AC}$, $\frac{y_Q}{y_B} = \frac{DQ}{DB}$. Тогда $\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q} = \frac{x_B x_C}{y_B y_C} \cdot \frac{AP \cdot AQ \cdot DB \cdot DC}{AB \cdot AC \cdot DP \cdot DQ}$.

Так как точки *B* и *C* лежат на изогоналях, то $\frac{x_B x_C}{y_B y_C}$ = 1. По теореме Менелая для треугольника *APC* и прямой *BD*: $\frac{PB}{BA} \cdot \frac{AQ}{QC} \cdot \frac{CD}{DP}$ = 1. Аналогично, для треугольника *AQB* и прямой *PD*: $\frac{AP}{PB} \cdot \frac{BD}{DQ} \cdot \frac{QC}{CA}$ = 1. Почленно перемножив последние два равенства, получим: $\frac{AP \cdot AQ \cdot DB \cdot DC}{AB \cdot AC \cdot DP \cdot DQ}$ = 1. Следовательно, $\frac{x_P x_Q}{y_P y_Q}$ = 1, что и требовалось.

Прежде, чем вы перейдете к решению задач, ***три комментария***:

1) теорема справедлива и для случая внешних изогоналей (то есть, точки *P* и *Q* могут лежать и вне угла *AOD*);

2) если лучи *OP* и *OQ* совпадают, то этот луч является биссектрисой угла *AOD* (вырожденный случай, который является следствием теоремы);

3) теорему можно обобщить на случай, когда *P* – бесконечно удаленная точка, то есть, когда *AB* || *DC*. Тогда луч *OP* также им параллелен.

Действительно, пусть это не так и *OP* – не изогональ с *OQ*, тогда этой диагональю является луч *OP*', который должен пересечь *AB* è *DC* в одной и той же точке, что невозможно (см. рис. 1г).

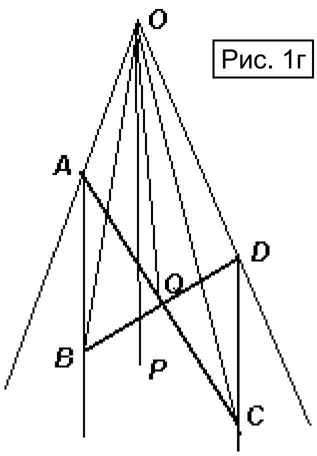


Рис. 1г

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. В треугольнике *ABC* .чевианы AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Оказалось, что $\angle B_1A_1C = \angle C_1A_1B$. Докажите, что AA_1 – высота треугольника *ABC*.

2. (*Санкт-Петербургская математическая олимпиада, 2008*) Диагонали *AC* и *BD* четырехугольника *ABCD* пересекаются в точке *E*, а прямые *AB* и *DC* – в точке *F*. На луче *FE* отмечена точка *P* так, .что $\angle BPE = \angle CPE$. Докажите, .что $\angle APE = \angle DPE$.

3. (*Турнир городов, 2006*) В треугольнике *ABC* проведена биссектриса *AA*', на которой отмечена точка *X*. Прямая *BX* пересекает *AC* в точке *B*', а прямая *CX* пересекает *AB* в точке *C*'. Отрезки *A*'*B*' и *CC*' пересекаются в точке *P*, а отрезки *A*'*C*' и *BB*' – в точке *Q*. Докажите, что $\angle PAC = \angle QAB$.

4. а) На сторонах *AB* и *AC* остроугольного треугольника *ABC* вне его построены квадраты *ABFE* и *ACGT*. Докажите, что точка *P* пересечения прямых *CF* и *BG* лежит на высоте AA_1 треугольника *ABC*.

б) (*Городская устная олимпиада по геометрии, 2010*) Из вершины *A* параллелограмма *ABCD* опущены перпендикуляры *AM* на *BC* и *AN* на *CD*. *P* – точка пересечения *BN* и *DM*. Докажите, что $AP \perp MN$.

в) Обобщите утверждения пунктов а) и б).

5. (*Олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, финал, 2016*) Продолжения боковых сторон трапеции *ABCD* пересекаются в точке *P*, а ее диагонали – в точке *Q*. На меньшем основании *BC* отмечена точка *M* так, что *AM* = *MD*. Докажите, что $\angle PMB = \angle QMB$.

6. (*Городская устная олимпиада по геометрии, 2014*) Дан выпуклый четырехугольник *ABCD*. Пусть *I* и *J* – центры окружностей, вписанных в треугольники *ABC* и *ADC* соответственно, а I_a и J_a – центры их вневписанных окружностей, касающихся сторон *BC* и *DC*. Докажите, что точка пересечения прямых IJ_a и JI_a лежит на биссектрисе угла *BCD*.

7. а) На диагонали AC ромба $ABCD$ Отмечена произвольная точка E. На прямых AB и BC выбраны точки N и M соответственно так, что $NE = AE$ и $ME = CE$. Прямые AM и CN пересекаются в точке K. Докажите, что точки K, E и D лежат на одной прямой.

б) (*Олимпиада по геометрии имени И.Ф. Шарыгина, заочный тур, 2013*) На стороне AB треугольника ABC выбирается произвольная точка C_1. Точки A_1 и B_1 выбираются на лучах BC и AC так, чтобы $\angle AC_1B_1 = \angle BC_1A_1$. Прямые AA_1 и BB_1 пересекаются в точке C_2. Докажите, что все такие прямые C_1C_2 проходят через одну и ту же фиксированную точку.

8. Внутри треугольника ABC отмечены точки X, Y и Z так, что $\angle BAZ = \angle CAY$, $\angle CBX = \angle ABZ$ и ∠*AÑY* = $\angle BCX$. Докажите, что в одной точке пересекаются прямые:

а) AX, BY и CZ; б) $X'Z'$, XZ и AC (X' и Z' – точки, изогонально сопряженные точкам X и Z относительно ABC).

9. Из вершин A и C треугольника ABC опущены перпендикуляры AA_1 и CC_1 на прямую, содержащую внешнюю биссектрису угла при вершине B. Докажите, что AC_1 и CA_1 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

10. а) (*Short List IMO, 2007*) Диагонали трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q лежит между параллельными прямыми BC и AD так, что $\angle AQD = \angle CQB$ (P и Q лежат в разных полуплоскостях относительно CD). Докажите, что ∠*ÂQĐ* = $\angle DAQ$.

б) (*Всероссийская олимпиада по математике, 2012, региональный тур*) В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям, O – точка пересечения диагоналей. На описанной окружности треугольника OCD отмечена точка S, диаметрально противоположная точке O. Докажите, что ∠*ÂSC* = $\angle ASD$.

11. В треугольнике ABC отмечены две пары изогонально сопряженных точек: X и X', Y и Y'. Z – точка пересечения XY и $X'Y'$, Z' – точка пересечения $X'Y$ и XY'. Докажите, что Z и Z' – также изогонально сопряженные.