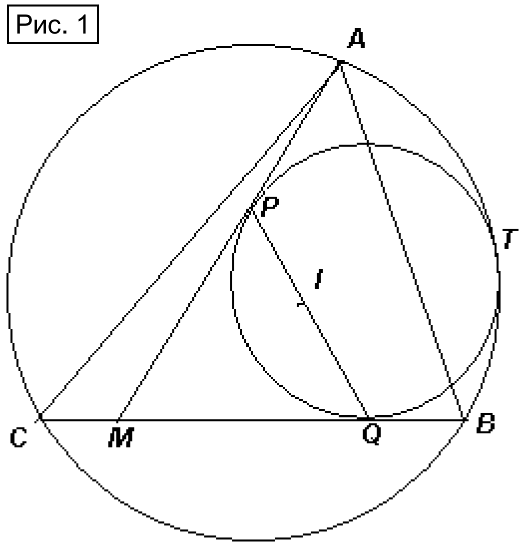
Лемма Саваямы и окружности Тебо

Использованы материалы занятий П.А. Кожевникова (см. http://geometry.ru/persons/kozhevnikov/sawayama.pdf), статья В.Ю. Протасова «Касающиеся окружности: от Тебо до Фейербаха» (см. http://geometry.ru/articles/protasovtebo.pdf) и работа М. Урьева (см. https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works/uriev2.pdf).

Рис. 1

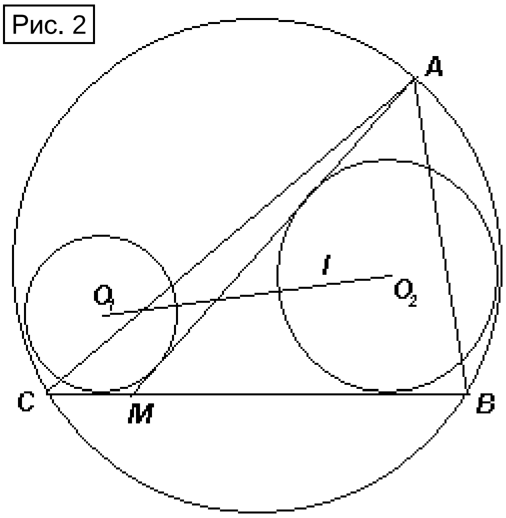


На этом занятии будут рассмотрены факты, которые являются обобщением некоторых свойств полувписанной окружности. Главный факт, из которого будет следовать почти все остальное, это ***лемма Саваямы***, которая является обобщением ***леммы Варьера*** (см. пункт 7 занятия «Полувписанная окружность»).

Лемма Саваямы. На стороне *BC* треугольника *ABC* отмечена произвольная точка *M*. Окружность ω касается описанной окружности треугольника *ABC*, отрезка *MB* в точке *Q* и прямой *AM* в точке *P*. Тогда инцентр *I* треугольника *ABC* лежит на отрезке *PQ* (см. рис. 1).

Из нее, в частности, будет следовать и ***теорема Фейербаха***, одно из доказательств которой мы уже рассматривали, и ***теорема Тебо***.

Рис. 2



Теорема Тебо. На стороне *BC* треугольника *ABC* отмечена произвольная точка *M*. В криволинейные треугольники *AMB* и *AMC* вписаны окружности. Тогда линия центров этих окружностей содержит инцентр треугольника *ABC* (см. рис. 2).

Эти две окружности называют ***окружностями Тебо***.

Для их доказательства вам потребуется предварительно доказать несколько вспомогательных утверждений, а после того, как они будут доказаны, можно будет их использовать для решения следующих задач.

Если доказательство леммы Саваямы вызовет большие трудности, то разрешено ее использовать для дальнейшего, а доказательство вы сможете изучить самостоятельно.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Задача 1 может служить леммой к задаче 4, задача 2 – к задаче 5, задача 3 – к задаче 6.

1. Окружности α и β касаются в точке *T*. Касательная к окружности β в точке *Q* пересекает окружность α в точках *A* и *B*. Прямая *QT* вторично пересекает α в точке *L*. Докажите, что: а) *L* – середина дуги *AB*; б) $LQ \cdot LT = LA^2 = LB^2$.

2. К окружностям с центрами O_1 и O_2 проведена общая внутренняя касательная A_1A_2 и общая внешняя касательная B_1B_2 (A_1 и B_1 – точки ее касания с окружностью O_1, A_2 и B_2 – с окружностью O_2). Отрезки A_1A_2 и B_1B_2 – диаметры окружностей ω_1 и ω_2. Докажите, что: а) прямая O_1O_2 – радикальная ось окружностей ω_1 и ω_2; б) прямые O_1O_2, A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются в одной точке.

3. В треугольнике *ABC*: M_C и M_B – середины сторон *AB* и *AC* соответственно, A_1 и B_1 – точки касания сторон *AC* и *BC* с вписанной окружностью, а A_2 и B_2 – точки касания стороны AC и продолжения стороны BC с вневписанной окружностью соответственно. Докажите, что прямые M_CM_B, A_1B_1 и A_2B_2 пересекаются на биссектрисе угла ABC.

4. (*Лемма Саваямы*) На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка M. Окружность ω касается описанной окружности треугольника ABC, отрезка MB в точке Q и прямой AM в точке P. Докажите, что инцентр I треугольника ABC лежит на отрезке PQ.

5. а) (*Теорема Тебо*) На стороне BC треугольника ABC отмечена произвольная точка M. В криволинейные треугольники AMB и AMC вписаны окружности. Докажите, что линия центров этих окружностей содержит инцентр треугольника ABC.

б) Объясните построение окружностей Тебо, если заданы треугольник ABC и точка M.

6. Докажите теорему Фейербаха, используя окружности Тебо.

7. Окружность вписана в угол с вершиной С. Рассматриваются все треугольники ABC, у которых AB – касательная к этой окружности, а вершины A и B лежат на сторонах угла, Докажите, что описанные окружности таких треугольников касаются фиксированной окружности.

8. Окружность касается оснований AB и CD трапеции $ABCD$ и меньшей дуги BC окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что она касается и вписанной окружности этого треугольника.

9. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность, I_1 и I_2 – инцентры треугольников ABD и ACD, I_3 и I_4 – центры вневписанных окружностей треугольников ABC и BCD, касающихся сторон AB и CD соответственно. Докажите, что эти четыре точки лежат на одной прямой.

10. Пусть AM – биссектриса треугольника ABC. Докажите, что окружности Тебо касаются в инцентре треугольника ABC.

11. На стороне BC треугольника ABC отмечена точка M и построены окружности Тебо с центрами O_1 и O_2. К ним проведена общая внешняя касательная, отличная от BC, которая пересекает AM в точке K. Докажите, что:

а) инцентр I треугольника ABC является проекцией точки K на прямую O_1O_2;

б) прямая, параллельная BC и проходящая через точку K, является касательной к вписанной окружности треугольника ABC;

в) $\dfrac{O_1I}{O_2I} = tg^2\dfrac{\angle AMB}{2}$;

г) окружности Тебо равны тогда и только тогда, когда M – точка касания вневписанной окружности треугольника ABC со стороной BC.