Разнобой_10

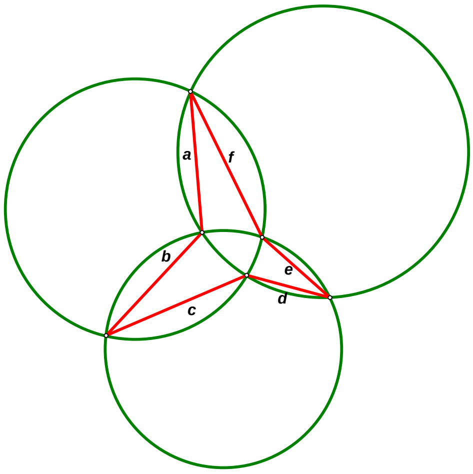
Сегодня вам предлагается подборка задач разной тематики в качестве тренировки. Большинство из них так или иначе связано с ранее изученными темами занятий. Нумерация задач весьма условна с точки зрения их трудности, поэтому выбирайте задачи, которые нравятся.

Задачи для самостоятельного решения

1. Выписаны 9 чисел – длины биссектрис, высот и медиан некоторого треугольника. Известно, что среди этих чисел не более четырех различных. Докажите, что этот треугольник – равнобедренный.

2. Длина каждой из сторон выпуклого шестиугольника *ABCDEF* меньше 1. Может ли длина каждой из диагоналей *AD*, *BE* и *CF* быть не меньше двух?

3. (*Теорема Харуки*) Даны три попарно пересекающиеся окружности, в которых последовательно соединены точки их попарного пересечения. Длины получившихся хорд равны *a*, *b*, *c*, *d*, *e* и *f* (см. рисунок). Докажите, что $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}=1$.



4. Дан треугольник *ABC*. Найдите геометрическое место таких точек *M* плоскости, что радиусы окружностей, описанных около треугольников *AMB*, *BMC* и *CMA,* равны.

5. В треугольнике *ABC* отмечены точки касания двух вневписанных окружностей со сторонами *AC* и *BC* – точки B_1 и A_1 соответственно. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков *AB* и A_1B_1, делит периметр треугольника *ABC* пополам.

6. Около остроугольного треугольника *ABC* описана окружность, *AN* – ее диаметр. На сторонах *AC* и *AB* отмечены точки *D* и *E* соответственно так, что $\angle BNE = \angle CND$. Прямые *DE* и *BC* пересекаются в точке *F*, *K* – середина отрезка *DE*. Окружность, описанная около треугольника *ADE*, вторично пересекает данную окружность в точке *X*. Докажите, что угол *KXF* – прямой.

7. Даны две пересекающиеся окружности. Через одну из их общих точек *A* проводятся все возможные секущие, которые вторично пересекают данные окружности в точках *B* и *C*. Найдите геометрическое место точек *M* таких, что $\overline{AM}=\overline{AB}+\overline{AC}$.

8. В остроугольном треугольнике *ABC*: *D* – середина стороны *AC*, *H* – ортоцентр. Прямая, проходящая через точку *H* перпендикулярно отрезку *DH*, пересекает стороны *AB* и *BC* в точках *E* и *F*. Докажите, что *HE* = *HF*.

9. Треугольник *ABC* вписан в окружность и еще проведена окружность через середины его сторон. Рассмотрим третью окружность, которая касается описанной окружности в точке *A* и касается второй окружности внешним образом в точке A_1. Аналогично определяются точки B_1 и C_1. Докажите, что прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке.