

Аффинная геометрия

Вспомним, каким образом в курсе стереометрии определяется **параллельное проектирование**.

Пусть даны плоскость α и пересекающая ее в точке A прямая a (см. рис. 1). Тогда **параллельной проекцией точки X на плоскость α в направлении прямой a называется**: 1) точка A , если $X \in a$; 2) точка X' пересечения с α прямой a' , параллельной a и проходящей через X , если $X \notin a$.

Преобразование пространства, которое каждой его точке ставит в соответствие ее параллельную проекцию называется параллельным проектированием.

Далее доказываются три основных свойства параллельного проектирования для прямых, не параллельных проектирующей прямой. Вспомним их формулировки:

- 1) Проекция прямой есть прямая, а проекция отрезка – отрезок.
- 2) Проекции параллельных прямых параллельны или совпадают.
- 3) При параллельном проектировании сохраняется отношение длин параллельных отрезков или отрезков, лежащих на одной прямой.

Каковы область определения и множество значений параллельного проектирования? [**Отображается пространство на плоскость**]

Если сузить область определения такого отображения и рассматривать проектирование плоскости на плоскость, то эти свойства, очевидно, сохранятся. Кроме того, существует еще одно важное свойство параллельного проектирования, которое доказывается чуть позже в курсе стереометрии (после того, как введено определение угла между плоскостями). Но, рассматривая **ортогональное проектирование** (как частный случай параллельного), на примере проектирования прямоугольника $ABCD$ на плоскость α , содержащую сторону AD , несложно получить, что

$S_{AB'C'D} = \cos \angle BAB'$ (см. рис. 2а).

Впоследствии в курсе стереометрии будет доказано, что для любых плоских фигур отношение площадей ортогональной проекции фигуры и самой фигуры равно косинусу угла между плоскостями, в которых лежат эти фигуры. Это, в свою очередь, позволяет обосновать еще одно важное свойство параллельного проектирования.

4) Параллельное проектирование плоскости на плоскость сохраняет отношение площадей фигур.

Пусть фигура F , лежащая в плоскости α , проектируется в направлении прямой l на плоскость α' и ее образом является фигура F' (см. рис. 2б). Проведем тогда плоскость β , перпендикулярную прямой l и рассмотрим ортогональные проекции фигур F и F' на плоскость β . Эти проекции совпадут, поэтому $S_F \cdot \cos \angle(\alpha; \beta) = S_{F'} \cdot \cos \angle(\alpha'; \beta)$.

Следовательно, $\frac{S_F}{S_{F'}} = \frac{\cos \angle(\alpha'; \beta)}{\cos \angle(\alpha; \beta)}$. Для любой другой фигуры Φ , лежащей в

плоскости α , отношение $\frac{S_\Phi}{S_{\Phi'}}$ будет таким же, значит, $\frac{S_\Phi}{S_F} = \frac{S_{\Phi'}}{S_{F'}}$, что и требовалось.

Заметим теперь, что рассмотренные свойства сохранятся и для композиции нескольких параллельных проектирований. **Параллельное проектирование плоскости на плоскость, а также композиции таких отображений называются**

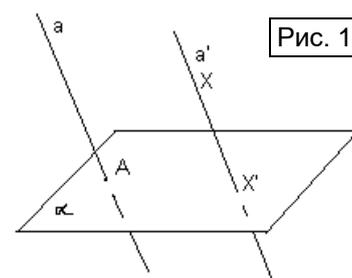


Рис. 1

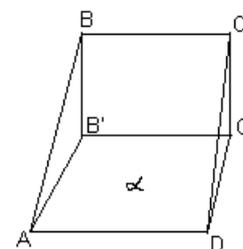


Рис. 2а

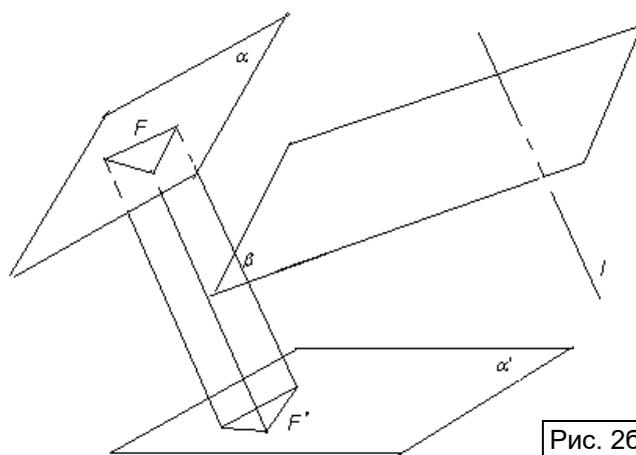


Рис. 2б

аффинными отображениями. В частности, можно рассмотреть аффинное отображение плоскости на себя или, иначе говоря, **аффинное преобразование плоскости**. Оно обладает всеми свойствами параллельного проектирования. Если рассматривать сохранение прямолинейности, взаимного расположения точек на прямой, параллельности и длин параллельных отрезков, а также отношения площадей фигур как основные **инварианты аффинных преобразований плоскости**, то теория таких инвариантов и называется **аффинной геометрией**.

Свойство фигуры относится к аффинной геометрии (и называется **аффинным**), если оно не изменяется при любом аффинном преобразовании. Фигура называется аффинной, если в ее определении присутствуют только аффинные инварианты. Например, **аффинными фигурами** являются параллелограмм, трапеция, многоугольник (треугольник). Частные случаи треугольников и параллелограммов не являются аффинными фигурами, так как требуют равенства непараллельных отрезков или равенства углов (и то, и другое не является аффинным инвариантом). Окружность – также не аффинная фигура, так как ее проекцией является эллипс (а эллипс – аффинная фигура!). Можно выделить также теоремы, справедливые в аффинной геометрии, например: теорема Фалеса и теорема о пропорциональных отрезках, теоремы о средней линии треугольника и трапеции, теорема о точке пересечения медиан треугольника, теорема о точке пересечения диагоналей параллелограмма, теорема Менелая, и пр.

По аналогии с равными и подобными фигурами определяется понятие аффинно эквивалентных фигур. **Две фигуры называются аффинно эквивалентными, если существует аффинное преобразование, переводящее одну из этих фигур в другую.** Например: 1) правильный треугольник аффинно эквивалентен любому треугольнику (для любых двух треугольников существует параллельное проектирование, при котором один из треугольников отображается в другой); 2) квадрат, ромб или прямоугольник аффинно эквивалентны любому параллелограмму; 3) любые трапеции с одинаковым отношением оснований аффинно эквивалентны.

Как решать геометрические задачи с помощью аффинных преобразований? Во-первых, этот метод применим **только** к решению таких задач, в которых используются **только аффинные свойства фигур**. С помощью аффинных преобразований, задача сводится к более простой за счет замены данной фигуры на ей аффинно эквивалентную, для которой решение осуществить проще. Полученный результат остается справедливым и для исходной фигуры (в силу аффинной эквивалентности фигур).

Пример 1. Докажите, что середины оснований трапеции, точка пересечения ее диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.

Решение. Рассмотрим равнобокую трапецию $ABCD$, которая аффинно эквивалентна произвольной (см. рис. 3а). Прямая, проходящая через точку E пересечения диагоналей и точку F пересечения продолжений боковых сторон является осью симметрии этой трапеции, поэтому, она проходит через середины оснований. Следовательно, это верно и для произвольной трапеции.

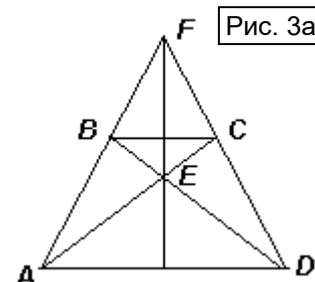


Рис. 3а

Какие способы доказательства этого факта вам были известны ранее? [С помощью **гомотетии** и с помощью **векторов**] И это не случайно!

1) Легко проверить, что любое **преобразование подобия** (в том числе все виды движений и гомотетия) **является частным случаем аффинных преобразований**.

2) При изучении векторов на плоскости рассматривается аффинная (косоугольная) система координат. Как она задается? [Двумя неколлинеарными векторами с общим началом, которые назывались **базисными**] Любой вектор в такой системе координат единственным образом выражается через базис с помощью **линейных** операций: **сложения векторов, их вычитания и умножения вектора на число**. В отличие от декартовой системы координат, аффинная не требует **метрики**, то есть угол между осями координат не фиксируется. Поэтому, задачи, связанные с **коллинеарностью**

точек и с отношением длин отрезков, лежащих на одной прямой, часто решаются с помощью линейных операций над векторами.

Пример 2. Найдите площадь овала, ограниченного эллипсом с полуосями длины a и b .

Решение. Пусть O – центр симметрии эллипса. Построим прямоугольник с тем же центром симметрии, сторонами, параллельными полуосям эллипса и касательными к нему (см. рис. 3б). Полученная фигура аффинно эквивалентна квадрату, стороны которого касаются круга. При таком аффинном преобразовании сохраняется отношение площади овала к

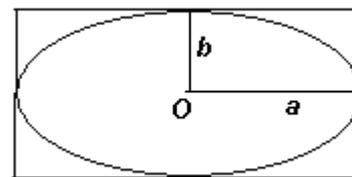


Рис. 3б

площади прямоугольника, то есть $\frac{S_{\text{ов.}}}{2a \cdot 2b} = \frac{S_{\text{кр.}}}{4r^2} = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, $S_{\text{ов.}} = \pi ab$.

Ответ: $S_{\text{ов.}} = \pi ab$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Существует ли пятиугольник, отличный от правильного, в котором: а) каждая диагональ параллельна противоположной стороне; б) точки попарного пересечения диагоналей образуют пятиугольник, подобный данному?
2. В трапеции $ABCD$ через вершины B и C меньшего основания провели прямые, соответственно параллельные CD и AB . Докажите, что: а) точка пересечения этих прямых лежит на прямой, проходящей через середины оснований; б) отрезок, соединяющий точки пересечения этих прямых с диагоналями трапеции, параллелен основаниям.
3. В параллелограмме $ABCD$ прямая, параллельная AB , пересекает сторону BC и диагональ AC в точках N и K соответственно. Докажите, что треугольники ADK и ABN равновелики.
4. Через точку P , лежащую внутри треугольника ABC , проведены три прямые, параллельные сторонам AB , BC и CA и пересекающие стороны BC , AC и AB соответственно в точках A' , B' и C' . Докажите, что $\frac{PA'}{AB} + \frac{PB'}{BC} + \frac{PC'}{CA} = 1$.
5. Точки M и N – середины сторон BC и CD параллелограмма $ABCD$ соответственно. Отрезки AM и BN пересекаются в точке P . Найдите, в каких отношениях точка P делит эти отрезки.
6. Каждая сторона треугольника разделена на три равные части и проведены все чевианы, соединяющие вершины с точками деления на противоположной стороне. Докажите, что в шестиугольнике, образованном этими прямыми, большие диагонали пересекаются в одной точке.
7. Точки K , N и P расположены на сторонах AB , BC и CA треугольника ABC соответственно так, что $\frac{AK}{KB} = \frac{BN}{NC} = \frac{CP}{PA}$. Докажите, что совпадают точки пересечения медиан треугольников: а) ABC и KNP ; б) ABC и треугольника, образованного прямыми AN , BP и CK .
8. На сторонах AB , BC и CA треугольника ABC выбраны точки K , N и P . Точки K' , N' и P' : а) симметричны точкам K , N и P относительно середин этих сторон; б) лежат на сторонах треугольника ABC так, что $KK' \parallel BC$, $NN' \parallel CA$ и $PP' \parallel AB$. Докажите, что треугольники KNP и $K'N'P'$ равновелики.
9. Дан треугольник ABC и прямая l , пересекающая BC , CA и AB в точках A_1 , B_1 и C_1 соответственно. Точка A' – середина отрезка, соединяющего проекции A_1 на прямые AB и AC . Аналогично определяются точки B' и C' . Докажите, что: а) A' , B' и C' лежат на некоторой прямой l' ; б) если l проходит через центр описанной окружности треугольника ABC , то l' проходит через центр его окружности девяти точек.