6.11.18

Полувписанная окружность

Использованы материалы занятий П.А. Кожевникова (см. http://geometry.ru/persons/kozhevnikov/poluvpis.pdf) и работа А. Гаркавого (см. https://www.mccme.ru/circles/oim/mmks/works/garkavyi.pdf).

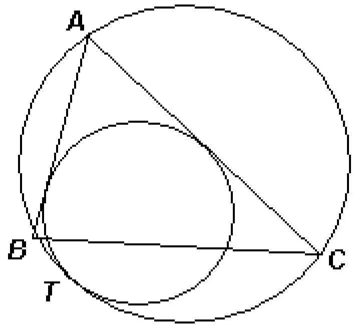

Рис. 1

Пусть в окружность ω вписан треугольник *ABC*. Рассмотрим окружность ω_1, касающуюся сторон *AB* и *AC* и окружности ω в точке *T* (см. рис. 1). ***Такую окружность будем называть полувписанной для треугольника ABC***.

Докажите, что такая окружность существует для любого треугольника *ABC*. [Пусть точка *Z* движется по биссектрисе угла *A*, тогда она равноудалена от *AB* и *AC* и найдется такое ее положение (из соображений непрерывности), при котором это расстояние будет равно расстоянию от *Z* до ω]

Сколько полувписанных окружностей у любого треугольника? [3]

Свойства этой конструкции вы изучите в процессе решения задач. Полезно предварительно вспомнить два факта.

1) ***Основная задача о симедиане***. Пусть касательные к описанной окружности треугольника *ABC*, проведенные в точках *B* и *C*, пересекаются в точке *X*. Тогда *AX* – симедиана треугольника *ABC*.

2) Что является композицией двух произвольных гомотетий? [**Гомотетия** или **параллельный перенос**] Второй случай нас пока не интересует. Пусть $H_{O_1}^{k_1} \circ H_{O_2}^{k_2} = H_O^k$. Что можно сказать о значении *k* и о положении точки *O*? [$k = k_1 k_2$, $O \in O_1O_2$].

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Треугольник *ABC* вписан в окружность ω. Окружность ω_1 касается сторон *AB* и *AC* в точках *K* и *L* соответственно и дуги *BC* в точке T_A. Лучи T_AK и T_AL пересекают окружность ω в точках *C*' и *B*' соответственно. Точка *W* – середина дуги *BC*, не содержащей точку T_A, *E* – точка, диаметрально противоположная *W*, *I* – центр окружности, вписанной в треугольник *ABC*. Докажите, что:

1) прямая *B*'*C*' – серединный перпендикуляр к отрезку *AI*;

2) прямая T_AA содержит симедиану треугольника *B*'*C*'T_A;

3) прямая T_AW содержит медиану треугольника *B*'*C*'T_A;

4) точка *I* лежит на прямой T_AW;

5) точки T_A, *B*, *K* и *I* (а также точки T_A, *C*, *L* и *I*) лежат на одной окружности;

6) прямые *CC*' и *BB*' являются касательными к этим окружностям;

7) (*лемма Варьера*) точка *I* – середина отрезка *KL*;

8) прямая *B*'*C*' содержит среднюю линию треугольника *KAL*;

9) прямая *KL* – касательная к окружностям, описанным около треугольников *BIC* и T_AIÅ;

10) радиус r_1 окружности ω_1 и радиус *r* вписанной окружности связаны соотношением: $\frac{r}{r_1} = \cos^2 \frac{\angle BAC}{2}$;

11) прямые AT_A, BT_B и CT_c, где T_B и T_C – точки касания двух других полувписанных окружностей треугольника *ABC* с его описанной окружностью ω, пересекаются в одной точке и объясните, что это за точка;

12) прямые *KL, BC* и *TE* пересекаются в одной точке или параллельны;

13) точка пересечения прямых из пункта 12) и две точки, определяемые аналогично, лежат на одной прямой;

14) биссектриса угла *BAC* является и биссектрисой угла T_AAD, где *D* – точка касания вневписанной окружности треугольника *ABC* со стороной *BC*;

15) Пусть перпендикуляр, восстановленный в точке B к прямой AB, пересекается с описанной окружностью треугольника ABC в точке U, и с биссектрисой угла BAC в точке Z. Тогда длина касательной, проведённой из точки U к полувписанной окружности, равна длине отрезка UZ.

16) Пусть точка Q – пересечение прямых AT_A и KL. Тогда угол BQK равен углу CQL.