23.10.18

От леммы Архимеда до теоремы Фейербаха

Использован расширенный перевод статьи Jean-Louis Ayeme. Feurbach's theorem. A new purely synthetic proof. См. http://geometry.ru/articles/aymefeuerbach.pdf.

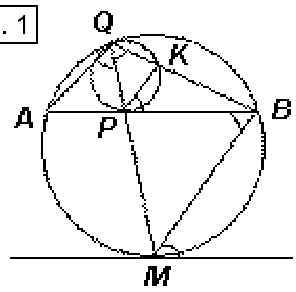
Цель этого занятия – доказать одну из самых красивых теорем элементарной геометрии, пройдя по «цепочке» сравнительно несложных задач, почти не отвлекаясь.

Теорема Фейербаха. В любом треугольнике окружность девяти точек касается вписанной и всех вневписанных окружностей.

Обычно эту теорему доказывают с помощью инверсии, но, на мой взгляд, это менее интересно, поэтому поступим иначе.

1. Вспомним одну знакомую вам геометрическую конфигурацию. В окружности ω радиуса R проведена хорда AB и в сегмент, отсеченный этой хордой, вписана вторая окружность ω_1 радиуса r, касающаяся AB в точке P, а дуги окружности ω – в точке Q. Тогда луч QP является биссектрисой угла AQB (см. рис. 1).

Рис. 1



Доказательство. Пусть луч QP пересекает ω в точке M. Рассмотрим гомотетию с центром Q и коэффициентом $k=\frac{R}{r}$. При этой гомотетии образом ω_1 является ω, образом точки P – точка M. Далее можно рассуждать по-разному.

<u>Первый способ</u>. Образом касательной AB к окружности ω_1 является касательная к ω, проходящая через точку M. Угол между этой касательной и хордой BM равен вписанному углу BQM и равен углу ABM (из параллельности касательной и прямой AB). Так как $\angle ABM = \angle AQM$, то $\angle BQM = \angle AQM$, что и требовалось.

<u>Второй способ</u>. Рассмотрим точку K – прообраз точки B при указанной гомотетии, тогда образом прямой PK является прямая BM, значит, $PK \parallel BM$, следовательно, $\angle KPB = \angle PBM$. Кроме того, $\angle BQP = \angle KPB$ и $\angle ABM = \angle AQM$. Таким образом, $\angle BQP = \angle AQP$, что и требовалось.

Доказанное утверждение называется леммой Архимеда (или ***леммой о сегменте***). Из доказанного сразу следует, что ***M* – середина дуги *AB***.

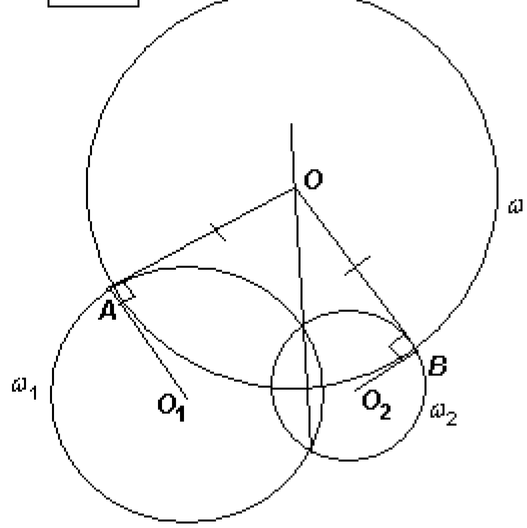
2. Вспомним, что такое ***ортогональные окружности***.

<u>Определение</u>. Две пересекающиеся окружности называются ортогональными, если касательные к ним в точке их пересечения – взаимно перпендикулярны.

В прошлом году на соответствующем занятии была задача: найти ГМТ центров окружности, ортогональной двум данным окружностям.

Искомое ГМТ – ***все точки радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2, лежащие вне этих окружностей***.

Рис. 2



Доказательство. Пусть точка O – центр окружности ω, ортогональной данным окружностям ω_1 и ω_2, тогда радиусы OA и OB этой окружности являются к ним касательными (см. рис. 2). Так как $OA = OB$, то O лежит на радикальной оси данных окружностей.

В обратную сторону: любая точка O радикальной оси данных окружностей (лежащая вне этих окружностей, если окружности имеют общие точки), имеет одинаковые степени относительно ω_1 и ω_2. Следовательно, существует окружность с центром O, ортогональная им.

Из этого утверждения следует, что ***если центр окружности ω лежит на радикальной оси окружностей ω_1 и ω_2, и ω ортогональна одной из них, то она ортогональна и другой***.

Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

1. В окружности ω проведена хорда *AB*.

а) Объясните, как построить окружность, касающуюся *AB* и ω, причем хорды – в заданной точке *P*

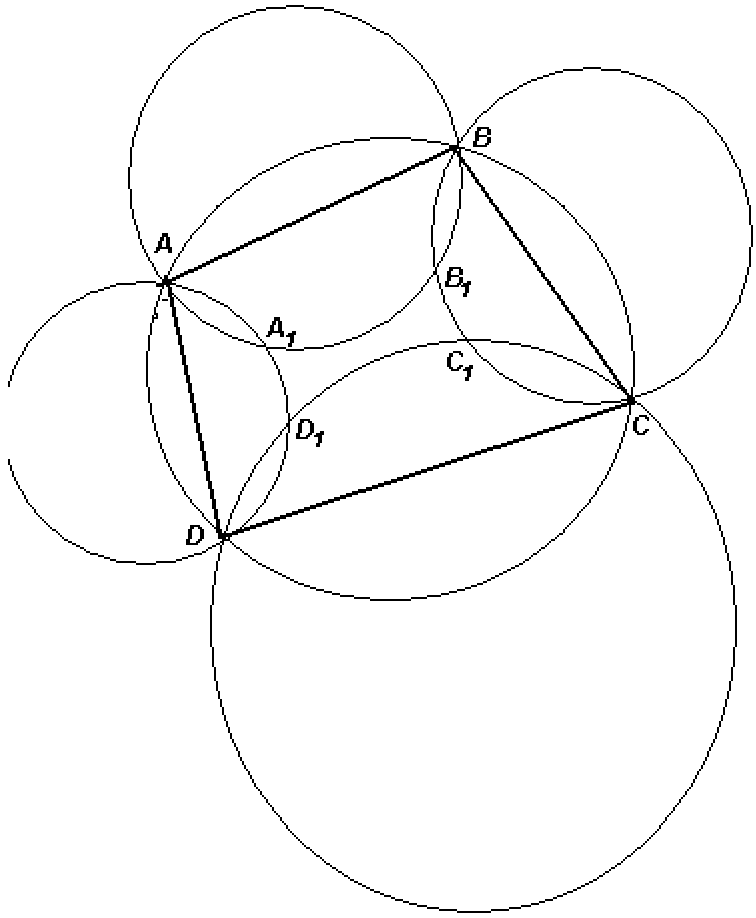
б) Пусть *M* – середина дуги *AB*, которой не касается построенная окружность. .Докажите, что длина касательной, проведенной из точки *M* к этой окружности, равна *MA*.

в) Докажите, что если в этот же сегмент вписать две окружности, пересекающиеся в точках *C* и *D*, то прямая *CD* содержит точку *M*.

2. Из точки *D* окружности ω опущен перпендикуляр *DC* на диаметр *AB*. Окружность ω_1 касается отрезка *CA* в точке *E*, а также отрезка *CD* и окружности ω. Докажите, что *DE* – биссектриса треугольника *ADC*.

3. (*Критерий Архимеда*) В окружности β проведена хорда *MN*, *L* – середина одной из дуг *MN*, γ – окружность с центром *L* и радиусом *LM*. Окружность α касается хорды *MN* в точке *B* и лежит с точкой *L* в разных полуплоскостях относительно *MN.* Докажите, что окружности α и β касается тогда и только тогда, когда γ и α ортогональны.

.**4.** *ABCD* – вписанный четырехугольник. а) Проведены еще четыре окружности, для которых стороны *ABCD* являются хордами, A_1, B_1, C_1 и D_1 – точки их попарного пересечения (см. рис.). Докажите, что эти точки лежат на одной окружности. б) A_1 – основание перпендикуляра, опущенного из вершины *A* на диагональ *BD*. Аналогично определяются точки B_1, C_1 и D_1. Докажите, что эти точки лежат на одной окружности.



5. *ABCD* – вписанный четырехугольник. A_1 – центр окружности, вписанной в треугольник *BCD*. Аналогично определяются точки B_1, C_1 и D_1. Докажите, что $A_1B_1C_1D_1$ – прямоугольник.

6. В треугольнике *ABC*: точки A_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла *B* из вершин *A* и *C* соответственно; BB_1 – высота, D_1 – середина стороны *AC*. Докажите, что: а) точки A_1, B_1, C_1 и D_1 лежат на одной окружности; б) центр этой окружности лежит на окружности девяти точек треугольника *ABC.*

7. Окружность, вписанная в треугольник *ABC*, касается стороны *AC* в точке *X*, а вневписанная окружность касается этой стороны в точке *Y*. A_1 и C_1 – основания перпендикуляров, опущенных на биссектрису угла *B* из вершин *A* и *C* соответственно; Докажите, что: а) точки A_1; *Y*; C_1 и *X* лежат на одной окружности; б) центром этой окружности является середина *AC*.

8. (*Теорема Фейербаха*) а) Пусть в треугольнике: α – вписанная окружность, β – окружность девяти точек. Докажите, что α и β касаются, используя еще две окружности: из задачи 6 и из задачи 7; б) Докажите, что окружность девяти точек касается любой вневписанной окружности.

9. В треугольнике *ABC* серединный перпендикуляр к стороне *BC* пересекает прямые *AB* и *AC* в точках A_B и A_C соответственно. Пусть O_a – центр описанной окружности треугольника AA_BA_C. Аналогично определяются точки O_b и O_c. Докажите, что описанная окружность треугольника $O_aO_bO_c$ касается описанной окружности исходного треугольника.