

Серия 32. Хардкорная комбинаторика

1. Четверть плоскости с положительными координатами разбили на клетки 1×1 . В некоторых клетках получившейся доски лежат фишки. Разрешается убрать фишку с клетки, имеющей координаты (i, j) и поставить по фишке в клетки $(i + 1, j)$ и $(i, j + 1)$, при этом запрещается ставить более одной фишки в клетку. Изначально в трёх левых нижних клетках, образующих уголок, стоит по фишке. Докажите, что такими операциями нельзя добиться того, чтобы они стали пустыми.
2. У Леши есть несколько непустых подмножеств конечного множества A . Если произвольно выбрать нечетное число Лешиних подмножеств, то обязательно найдется элемент, входящий в нечетное число выбранных. Докажите, что существует такое $T \subset A$, что T имеет с каждым Лешиним подмножеством нечетное число общих элементов.
3. Прямоугольник $m \times n$ склеен в тор. Докажите, что число способов его разрезать на прямоугольники чётной площади чётно (разрезания, отличающиеся друг от друга поворотом тора, считаются разными).
4. Рёбра графа покрашены в четыре цвета таким образом, что для любого пути из трёх рёбер первое и третье ребро пути покрашены в разные цвета (начало и конец пути могут совпадать). Докажите, что вершины этого графа можно покрасить в четыре цвета правильным образом.