

## Последовательности

1. Фирма «ДолгоДорогСтрой» должна построить 146 км дороги. В первый день она строит 1 км дороги. Каждый следующий день она строит  $\frac{1}{x^{10}}$  км дороги, где  $x$  — длина уже построенной дороги. Закончит ли когда-нибудь стройку «ДолгоДорогСтрой»?
2. Дана последовательность натуральных чисел  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , в которой  $a_1$  не делится на 5 и для всякого  $n$   $a_{n+1} = a_n + b_n$ , где  $b_n$  — последняя цифра числа  $a_n$ . Докажите, что последовательность содержит бесконечно много степеней двойки.
3. В числовой последовательности 4, 7, 5, 8, 4, 4, 1, ... каждый член, начиная с пятого, равен последней цифре суммы предшествующих четырёх членов.
  - (а) Докажите, что в этой последовательности еще раз встретится участок 4, 7, 5, 8.
  - (б) Докажите, что это произойдет не позднее, чем через 10000 шагов.
  - (с) Докажите, что в этой последовательности встретится участок 2, 0, 1, 9.

**Определение.** Последовательностью чисел Фибоначчи называется последовательность  $F_0 = 0, F_1 = 1, F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$  для всех натуральных  $n$ .

4. Докажите тождества
  - (а)  $F_1 + F_2 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$ ;
  - (б)  $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$ .
5.
  - (а) Докажите, что  $F_{2n}$  делится на  $F_n$ .
  - (б) Докажите, что  $F_{kn}$  делится на  $F_n$ .
  - (с) Докажите, что  $(F_n, F_m) = F_{(n,m)}$ .
  - (д) Докажите, что  $F_n$  делится на  $F_m$  тогда и только тогда, когда  $n$  делится на  $m$  (или когда  $m = 2$ ).
6. Вычислите  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 3} + \frac{3}{2 \cdot 5} + \dots + \frac{F_N}{F_{N-1} \cdot F_{N+1}}$ .
7. Последовательность натуральных чисел  $a_n$  задана первым членом  $a_1$  и правилом  $a_{n+1} = a_n/2$ , если  $a_n$  — чётное,  $a_{n+1} = 3a_n + 1$ , если  $a_n$  — нечётное. Докажите, что в этой последовательности встретится число, делящееся на 4.
8. Последовательность  $a_n$  и  $b_n$  заданы условиями

$$a_1 = 1, b_1 = 2, a_{n+1} = \frac{1 + a_n + a_n b_n}{b_n}, b_{n+1} = \frac{1 + b_n + a_n b_n}{a_n}.$$

Докажите, что  $a_{2019} < 5$ .