

Вписанная окружность и прямоугольный треугольник

1. В треугольнике ABC угол C — прямой. Окружность, вписанная в угол CAB касается луча AC в точке S и луча AB в точке X ; окружность, вписанная в угол CBA касается луча BC в точке S и луча BA в точке Y . Найдите $\angle XSY$.
2. В треугольнике ABC угол C — прямой, $\angle A = 30^\circ$. Окружность с центром I , вписанная в треугольник, касается катета AC в точке P и пересекает отрезок BI в точке M . Точка K — середина отрезка AI . Докажите, что $CM = PK$.
3. В треугольник ABC с прямым углом C вписана окружность, касающаяся сторон AC , BC и AB в точках M , K и N соответственно. Через точку K провели прямую, перпендикулярную отрезку MN . Она пересекла катет AC в точке X . Докажите, что $CK = AX$.
4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C угол A равен 30° . Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC , D — точка пересечения отрезка BI с этой окружностью. Докажите, что отрезки AI и CD перпендикулярны.
5. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается катетов AC и BC в точках B_1 и A_1 , а гипотенузы — в точке C_1 . Прямые C_1A_1 и C_1B_1 пересекают CA и CB соответственно в точках B_0 и A_0 . Докажите, что $AB_0 = BA_0$.
6. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC , касается катетов AB и BC в точках C_1 и A_1 соответственно. Окружность, описанная вокруг треугольника C_1BA_1 , проходит через середину медианы BM . Найдите углы треугольника ABC .
7. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC ($\angle C = 90^\circ$), касается катетов BC и AC в точках A_1 , B_1 соответственно. Внеписанная окружность касается стороны BC в точке A_2 , другая внеписанная окружность касается стороны AC в точке B_2 . Точки P и Q середины отрезков A_1B_2 и A_2B_1 соответственно. Найдите $\angle PCQ$.