

Перекладывание треугольников

1. (**Ключевой факт**) В треугольниках ABC и $A'B'C'$ $AB = A'B'$ и $\angle BAC + \angle B'A'C' = 180^\circ$. Докажите, что равенство сторон BC и $B'C'$ равносильно равенству углов $\angle BCA$ и $\angle B'C'A'$.
2. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$: $AD = BC$; $\angle ABD + \angle CDB = 180^\circ$. Докажите, что $\angle BAD = \angle BCD$.
3. Пусть K — середина стороны BC треугольника ABC . На лучах AB и AC взяты точки X и Y соответственно таким образом, что $AX = AY$ и точка K лежит на отрезке XY . Докажите, что $BX = CY$.
4. В четырёхугольнике $ABCD$ внешний угол при вершине A равен углу BCD , $AD = CD$. Докажите, что BD — биссектриса угла ABC .
5. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD .
6. В неравностороннем треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и BB_1 пересекаются в точке I . Найдите $\angle C$, если $A_1I = B_1I$.
7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = \angle C$. На продолжении BA за точкой A выбрали точку E такую, что $BC = AE$. Оказалось, что $\angle BDC = \angle ADE$ и $\angle ABD = \angle CAD$. Докажите, что $AC \perp BD$.
8. Внутри квадрата $ABCD$ выбрана точка P , а на его сторонах BC и CD — точки K и L соответственно таким образом, что $PK = PL$. Точка Q отрезка BK такова, что $BP < PQ = DL$, а углы BKP и DPL равны. Докажите, что PQ перпендикулярно DP .
9. На сторонах BC и AB треугольника ABC выбраны точки A' и C' соответственно. Прямые AA' и CC' пересекаются в точке K . Оказалось, что $AC' = CA'$ и $\angle ABC = \angle A'KC$. На отрезке KC' выбрана точка P такая, что $2PK = A'K + KC'$. Докажите, что $\angle APC = 90^\circ$.
10. Пусть O — точка пересечения диагоналей CE и AD выпуклого пятиугольника $ABCDE$. Известно, что $AB = DE$, $BC = AD = CE/2$ и $\angle ADE = \angle BAC + \angle BCA$. Докажите, что $AO = OE$.