11 класс   Геометрический разнобой   17 сентября 2018

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C вписанная окружность касается катета BC в точке K. Докажите, что хорда вписанной окружности, высекаемая прямой AK в два раза больше, чем расстояние от вершины C до этой прямой.

2. Точки L, M, N — середины сторон BC, CA, AB соответственно треугольника ABC. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямые LM и LN в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP и BQ параллельны.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. BL и CN — биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABL и CDN, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B.

4. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведённые к описанным окружностям треугольников AHB и CHB в точке H, пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Прямая O_1B вторично пересекает окружность ω_2 в точке C, прямая O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке D. Пусть X — вторая точка пересечения AC и ω_1, а Y — вторая точка пересечения BD и ω_2. Докажите, что $CX = DY$.

6. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный AC. Докажите, что прямые BP и DQ пересекаются на прямой AC.

7. Точка M — середина радиуса OA окружности ω. Точки B и C выбраны на ω в одной полуплоскости относительно прямой OA так, что $\angle BMO = \angle CMA$. Докажите, что $BC = 2|BM - CM|$.

11 класс   Геометрический разнобой   17 сентября 2018

1. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C вписанная окружность касается катета BC в точке K. Докажите, что хорда вписанной окружности, высекаемая прямой AK в два раза больше, чем расстояние от вершины C до этой прямой.

2. Точки L, M, N — середины сторон BC, CA, AB соответственно треугольника ABC. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямые LM и LN в точках P и Q соответственно. Докажите, что прямые CP и BQ параллельны.

3. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность. BL и CN — биссектрисы треугольников ABD и ACD соответственно. Окружности, описанные вокруг треугольников ABL и CDN, пересекаются в точках P и Q. Докажите, что прямая PQ проходит через середину дуги AD, не содержащей точку B.

4. Точка H — ортоцентр треугольника ABC. Касательные, проведённые к описанным окружностям треугольников AHB и CHB в точке H, пересекают прямую AC в точках A_1 и C_1. Докажите, что $A_1H = C_1H$.

5. Окружности ω_1 и ω_2 с центрами O_1 и O_2 соответственно пересекаются в точках A и B. Прямая O_1B вторично пересекает окружность ω_2 в точке C, прямая O_2A вторично пересекает окружность ω_1 в точке D. Пусть X — вторая точка пересечения AC и ω_1, а Y — вторая точка пересечения BD и ω_2. Докажите, что $CX = DY$.

6. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан около окружности ω. Пусть PQ — диаметр ω, перпендикулярный AC. Докажите, что прямые BP и DQ пересекаются на прямой AC.

7. Точка M — середина радиуса OA окружности ω. Точки B и C выбраны на ω в одной полуплоскости относительно прямой OA так, что $\angle BMO = \angle CMA$. Докажите, что $BC = 2|BM - CM|$.