11 класс Геометрический разнобой 7 марта 2019

1. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K. Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$.

2. В окружности с центром в точке O проведены равные хорды AB, CD и EF (точки на окружности лежат в таком порядке: A, C, E, B, D, F). Хорды AB и CD пересекаются в точке P, AB и EF — в точке Q, CD и EF — в точке R, причём точки O и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CD. Докажите, что угол POR равен половине угла BQF.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись точки M и N такие, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

4. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки A_0B_0 и C_0D_0. Докажите, что $B_0C_0 = A_0D_0$.

5. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$; CE — высота треугольника. Докажите, что угол LEM прямой.

6. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD, в точке K. Точка M середина BC, N середина AD. Докажите, что точки B, M, N и K лежат на одной окружности.

7. Окружности $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ проходят через точку O. Окружности ω_1 и ω_2 повторно пересекаются в точке A_1, окружности ω_2 и ω_3 — в точке A_2 и т.д. На окружности ω_1 выбрана произвольная точка X_1. Прямая X_1A_1 повторно пересекает окружность ω_2 в точке X_2, прямая X_2A_2 повторно пересекает окружность ω_3 в точке $X_3, \ldots$, прямая X_nA_n повторно пересекает окружность ω_1 в точке X_1'. Докажите, что $X_1 = X_1'$.

8. Середины сторон выпуклого шестиугольника образуют шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны. Докажите, что большие диагонали исходного шестиугольника пересекаются в одной точке.

11 класс Геометрический разнобой 7 марта 2019

1. Биссектриса угла A равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание BC в точке K. Описанная окружность треугольника AKD пересекает сторону AB в точке L. Докажите, что $BL = KC$.

2. В окружности с центром в точке O проведены равные хорды AB, CD и EF (точки на окружности лежат в таком порядке: A, C, E, B, D, F). Хорды AB и CD пересекаются в точке P, AB и EF — в точке Q, CD и EF — в точке R, причём точки O и Q лежат в разных полуплоскостях относительно прямой CD. Докажите, что угол POR равен половине угла BQF.

3. На сторонах AB и AC треугольника ABC нашлись точки M и N такие, что $MC = AC$ и $NB = AB$. Точка P симметрична точке A относительно прямой BC. Докажите, что PA — биссектриса угла MPN.

4. Боковые стороны AB и CD трапеции $ABCD$ повернули относительно их середин на 90° против часовой стрелки, получились отрезки A_0B_0 и C_0D_0. Докажите, что $B_0C_0 = A_0D_0$.

5. На катетах прямоугольного треугольника ABC с прямым углом C вовне построили квадраты $ACKL$ и $BCMN$; CE — высота треугольника. Докажите, что угол LEM прямой.

6. На стороне AB треугольника ABC выбрана точка D. Описанная окружность треугольника BCD вторично пересекает окружность, проходящую через точки A и D и касающуюся прямой CD, в точке K. Точка M середина BC, N середина AD. Докажите, что точки B, M, N и K лежат на одной окружности.

7. Окружности $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ проходят через точку O. Окружности ω_1 и ω_2 повторно пересекаются в точке A_1, окружности ω_2 и ω_3 — в точке A_2 и т.д. На окружности ω_1 выбрана произвольная точка X_1. Прямая X_1A_1 повторно пересекает окружность ω_2 в точке X_2, прямая X_2A_2 повторно пересекает окружность ω_3 в точке $X_3, \ldots$, прямая X_nA_n повторно пересекает окружность ω_1 в точке X_1'. Докажите, что $X_1 = X_1'$.

8. Середины сторон выпуклого шестиугольника образуют шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны. Докажите, что большие диагонали исходного шестиугольника пересекаются в одной точке.