11 класс	Числовой разнобой	4 марта 2019

1. Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12:00 повышается или понижается на $n\%$, где n — фиксированное натуральное число, меньшее 100 (курс не округляется). Существует ли n, для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение?

2. На сколько нулей может оканчиваться число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ при натуральных n?

3. Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ такие, что для всех $1 \leqslant k \leqslant 2017$ выполнено $\frac{1}{a_{k+2}} = \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_k}$?

4. Существуют ли такие натуральные n и k, что десятичная запись числа 2^n начинается числом 5^k, а десятичная запись числа 5^n начинается числом 2^k?

5. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$ есть числа a_1^2, a_2^2, a_3^2. Докажите,что эта прогрессия состоит из целых чисел.

6. Найдите наибольшее натуральное число N, для которого уравнение
a) $14x + 31y = N$;
b) $99x + 100y + 101z = N$
имеет единственное решение в натуральных числах.

7. Пусть p — простое число большее 3.
a) Преобразуем сумму
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$
в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.
b) Преобразуем сумму
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}$$
в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.
c) Преобразуем сумму
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$
в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p^2.
d) (Теорема Вольстенхольма.) Докажите, что выполняется сравнение
$$C_{2p}^{p} \equiv 2 \pmod{p^3}.$$

11 класс	Числовой разнобой	4 марта 2019

1. Курс акций компании «Рога и копыта» каждый день в 12:00 повышается или понижается на $n\%$, где n — фиксированное натуральное число, меньшее 100 (курс не округляется). Существует ли n, для которого курс акций может дважды принять одно и то же значение?

2. На сколько нулей может оканчиваться число $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ при натуральных n?

3. Существуют ли натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2019}$ такие, что для всех $1 \leqslant k \leqslant 2017$ выполнено $\frac{1}{a_{k+2}} = \frac{1}{a_{k+1}} + \frac{1}{a_k}$?

4. Существуют ли такие натуральные n и k, что десятичная запись числа 2^n начинается числом 5^k, а десятичная запись числа 5^n начинается числом 2^k?

5. Известно, что среди членов некоторой арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3, a_4, $\ldots$ есть числа a_1^2, a_2^2, a_3^2. Докажите,что эта прогрессия состоит из целых чисел.

6. Найдите наибольшее натуральное число N, для которого уравнение
a) $14x + 31y = N$;
b) $99x + 100y + 101z = N$
имеет единственное решение в натуральных числах.

7. Пусть p — простое число большее 3.
a) Преобразуем сумму
$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$
в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.
b) Преобразуем сумму
$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(p-1)^2}$$
в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p.
c) Преобразуем сумму
$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p-1}$$
в дробь $\frac{m}{n}$. Докажите, что m делится на p^2.
d) (Теорема Вольстенхольма.) Докажите, что выполняется сравнение
$$C_{2p}^{p} \equiv 2 \pmod{p^3}.$$