11 класс — Алгебраический разнобой — 28 февраля 2019

1. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что эта последовательность не является периодической (возможно, с предпериодом).

2. Последовательность положительных чисел $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенствам $x_n^2 \leqslant x_n - x_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n < 1/n$.

3. Для двух квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ нашлась такая линейная функция $l(x)$, что $P(x) = Q(l(x))$ при всех действительных x. Сколько может быть таких линейных функций $l(x)$? (Трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ фиксированы.)

4. Число x таково, что обе суммы

$$S = \sin 64x + \sin 65x, \quad C = \cos 64x + \cos 65x$$

являются рациональными числами. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

5. Числовая последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что при всех неотрицательных $m \geqslant n$ выполняется соотношение $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2019}, если $a_1 = 1$.

6. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет чётное число решений?

7. Обозначим

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{99}}}}}; \quad b = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{100}}}}}.$$

Докажите, что $|a - b| < \frac{1}{99! \cdot 100!}$.

8. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$, и т.д. Какую степень может иметь $P(x)$?

11 класс — Алгебраический разнобой — 28 февраля 2019

1. Последовательность $\{x_n\}$ такова, что $x_1 = 1$ и $x_{n+1} = n \sin x_n + 1$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что эта последовательность не является периодической (возможно, с предпериодом).

2. Последовательность положительных чисел $\{x_n\}$ удовлетворяет неравенствам $x_n^2 \leqslant x_n - x_{n+1}$ при всех $n \geqslant 1$. Докажите, что $x_n < 1/n$.

3. Для двух квадратных трёхчленов $P(x)$ и $Q(x)$ нашлась такая линейная функция $l(x)$, что $P(x) = Q(l(x))$ при всех действительных x. Сколько может быть таких линейных функций $l(x)$? (Трёхчлены $P(x)$ и $Q(x)$ фиксированы.)

4. Число x таково, что обе суммы

$$S = \sin 64x + \sin 65x, \quad C = \cos 64x + \cos 65x$$

являются рациональными числами. Докажите, что в одной из этих сумм оба слагаемых рациональны.

5. Числовая последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ такова, что при всех неотрицательных $m \geqslant n$ выполняется соотношение $a_{m+n} + a_{m-n} = \frac{a_{2m}+a_{2n}}{2}$. Найдите a_{2019}, если $a_1 = 1$.

6. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен ненулевой степени. Может ли оказаться, что уравнение $f(x) = a$ при любом значении a имеет чётное число решений?

7. Обозначим

$$a = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{99}}}}}; \quad b = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{\ldots + \cfrac{1}{100}}}}}.$$

Докажите, что $|a - b| < \frac{1}{99! \cdot 100!}$.

8. Дан многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами. Бесконечная последовательность различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$ такова, что $P(a_1) = 0$, $P(a_2) = a_1$, $P(a_3) = a_2$, и т.д. Какую степень может иметь $P(x)$?