11 класс Тренировочная олимпиада 28 января 2019

1. Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant 2.$$

2. На большой доске написано число $1000!$. Федя проделывает следующую операцию: он выбирает число вида $n!$, являющееся делителем числа, записанного на доске, и прибавляет выбранное число к записанному на доске. Результат записывается на доске, а исходное число стирается. Докажите, что независимо от выбранных чисел, на доске когда-нибудь появится число $2019!$.

3. На диаметре AB окружности ω выбрана точка C. На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая l пересекает окружность ω в точках A и D, окружность ω_1 — в точках A и E, а окружность ω_2 — в точках M и N. Докажите, что $MD = NE$.

4. На клетчатой полоске $1 \times n$ двое играют в следующую игру. Каждым своим ходом первый игрок закрашивает одну назакрашенную клетку, а второй — две рядом стоящие незакрашенные. Если игрок не может сделать ход — он выиграл. Кто выиграет при правильной игре?

5. Найдите все четвёрки целых чисел (x, y, z, t) таких, что их сумма равна 0, а число $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ является квадратом целого числа.

11 класс Тренировочная олимпиада 28 января 2019

1. Докажите, что при $0 < x < \frac{\pi}{2}$ выполняется неравенство

$$(\operatorname{tg} x)^{\sin x} + (\operatorname{ctg} x)^{\cos x} \geqslant 2.$$

2. На большой доске написано число $1000!$. Федя проделывает следующую операцию: он выбирает число вида $n!$, являющееся делителем числа, записанного на доске, и прибавляет выбранное число к записанному на доске. Результат записывается на доске, а исходное число стирается. Докажите, что независимо от выбранных чисел, на доске когда-нибудь появится число $2019!$.

3. На диаметре AB окружности ω выбрана точка C. На отрезках AC и BC как на диаметрах построены окружности ω_1 и ω_2 соответственно. Прямая l пересекает окружность ω в точках A и D, окружность ω_1 — в точках A и E, а окружность ω_2 — в точках M и N. Докажите, что $MD = NE$.

4. На клетчатой полоске $1 \times n$ двое играют в следующую игру. Каждым своим ходом первый игрок закрашивает одну назакрашенную клетку, а второй — две рядом стоящие незакрашенные. Если игрок не может сделать ход — он выиграл. Кто выиграет при правильной игре?

5. Найдите все четвёрки целых чисел (x, y, z, t) таких, что их сумма равна 0, а число $x^4 + y^4 + z^4 + t^4 + 4xyzt$ является квадратом целого числа.