11–2 Геометрический разнобой 17 декабря 2018

1. Окружность ω, вписанная в угол B треугольника ABC, касается прямой AB в точке A, а отрезка BC — в точке X. Обозначим вторую точку пересечения ω с отрезком AC через Y. Прямая, симметричная XY относительно прямой AC, пересекает луч AX в точке Z. Докажите, что $CX = CZ$.

2. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что середины отрезков AN, BN, CM, DM являются вершинами параллелограмма.

3. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка D такая, что $\angle BDC = 90^\circ$, и точка H — ортоцентр треугольника ABC. На отрезке AH как на диаметре построена окружность. Докажите, что длина касательной, проведённой из точки B к этой окружности равна длине отрезка BD.

4. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные пирамиды $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$, $BCDA'$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD'.

5. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон AB и AC в точках P и Q. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков PQ и BC, параллельна биссектрисе угла BAC.

6. В треугольнике ABC из произвольной точки P дуги BC описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PX и PY на стороны AB и BC. Пусть M и N — середины отрезков AC и XY. Докажите, что $\angle MNP = 90^\circ$.

7. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На сторонах AB и AC выбраны точки K и L соответственно так, что $BK = KL = LC$. Докажите, что угол KLC в два раза больше угла ABC.

8. Точка A_1 — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Произвольная окружность, проходящая через точки A и A_1, пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q. Пусть M и N — середины отрезков BC и PQ соответственно. Докажите, что $MN \perp AA_1$.

11–2 Геометрический разнобой 17 декабря 2018

1. Окружность ω, вписанная в угол B треугольника ABC, касается прямой AB в точке A, а отрезка BC — в точке X. Обозначим вторую точку пересечения ω с отрезком AC через Y. Прямая, симметричная XY относительно прямой AC, пересекает луч AX в точке Z. Докажите, что $CX = CZ$.

2. Точки M и N — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что середины отрезков AN, BN, CM, DM являются вершинами параллелограмма.

3. На высоте AA_1 остроугольного треугольника ABC отмечена точка D такая, что $\angle BDC = 90^\circ$, и точка H — ортоцентр треугольника ABC. На отрезке AH как на диаметре построена окружность. Докажите, что длина касательной, проведённой из точки B к этой окружности равна длине отрезка BD.

4. Около правильного тетраэдра $ABCD$ описана сфера. На его гранях как на основаниях построены во внешнюю сторону правильные пирамиды $ABCD'$, $ABDC'$, $ACDB'$, $BCDA'$, вершины которых лежат на этой сфере. Найдите угол между плоскостями ABC' и ACD'.

5. Вневписанные окружности треугольника ABC касаются его сторон AB и AC в точках P и Q. Докажите, что прямая, соединяющая середины отрезков PQ и BC, параллельна биссектрисе угла BAC.

6. В треугольнике ABC из произвольной точки P дуги BC описанной окружности треугольника ABC опущены перпендикуляры PX и PY на стороны AB и BC. Пусть M и N — середины отрезков AC и XY. Докажите, что $\angle MNP = 90^\circ$.

7. В треугольнике ABC угол A равен 60°. На сторонах AB и AC выбраны точки K и L соответственно так, что $BK = KL = LC$. Докажите, что угол KLC в два раза больше угла ABC.

8. Точка A_1 — середина дуги BAC описанной окружности треугольника ABC. Произвольная окружность, проходящая через точки A и A_1, пересекает отрезки AB и AC в точках P и Q. Пусть M и N — середины отрезков BC и PQ соответственно. Докажите, что $MN \perp AA_1$.