11–2 **Метод Штурма** 6 декабря 2018

1. Положительные числа x_1, x_2, $\dots$, x_n таковы, что $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Докажите, что
$$(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_n+1) \geqslant 2^n.$$

2. Пусть $0 \leqslant x_1, x_2, \dots, x_n \leqslant 1$. Докажите неравенство:
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

3. (IMO 1984). Для положительных чисел x, y, z таких, что $x+y+z=1$, докажите неравенство
$$0 \leqslant xy+yz+zx-2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

5. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что
$$a^2+b^2+c^2-3 \geqslant 18(a+b+c-ab-bc-ca).$$

6. (Беларусь 2014). Для положительных чисел a, b, c докажите, что
$$(a+b+c)^5 \geqslant 81abc(a^2+b^2+c^2).$$

7. (Канада). Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=3$. Докажите, что
$$a^2b+b^2c+c^2a \leqslant 4.$$

11–2 **Метод Штурма** 6 декабря 2018

1. Положительные числа x_1, x_2, $\dots$, x_n таковы, что $x_1 x_2 \dots x_n = 1$. Докажите, что
$$(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_n+1) \geqslant 2^n.$$

2. Пусть $0 \leqslant x_1, x_2, \dots, x_n \leqslant 1$. Докажите неравенство:
$$\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \dots + \frac{1}{1+x_n} \leqslant \frac{n}{1+\sqrt[n]{x_1 x_2 \dots x_n}}.$$

3. (IMO 1984). Для положительных чисел x, y, z таких, что $x+y+z=1$, докажите неравенство
$$0 \leqslant xy+yz+zx-2xyz \leqslant \frac{7}{27}.$$

4. Для положительных чисел a, b, c, d докажите неравенство
$$\sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2+d^2}{4}} \leqslant \sqrt[3]{\frac{abc+bcd+cda+dab}{4}}.$$

5. Произведение положительных чисел a, b, c равно 1. Докажите, что
$$a^2+b^2+c^2-3 \geqslant 18(a+b+c-ab-bc-ca).$$

6. (Беларусь 2014). Для положительных чисел a, b, c докажите, что
$$(a+b+c)^5 \geqslant 81abc(a^2+b^2+c^2).$$

7. (Канада). Положительные числа a, b, c таковы, что $a+b+c=3$. Докажите, что
$$a^2b+b^2c+c^2a \leqslant 4.$$