11 класс — Геометрическая интерпретация — 15 октября 2018

0. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

1. Неотрицательные числа a, b, c, A, B, C таковы, что

$$a+A=b+B=c+C=S.$$

Докажите, что

$$aB+bC+cA \leqslant S^2.$$

2. Числа a, b, c, d лежат в интервале $(0,1)$. Докажите, что

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-d)^2}+\sqrt{d^2+(1-a)^2}<4.$$

3. На доске написаны три натуральных числа. Петя записывает на бумажке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

5. Дана невозрастающая последовательность неотрицательных чисел

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2k+1} \geqslant 0.$$

Докажите неравенство:

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-\ldots+a_{2k+1}^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3-\ldots+a_{2k+1})^2.$$

6. Докажите неравенство

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<25\cdot 315.$$

7. Сумма n чисел равна нулю, а сумма их квадратов равна единице. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, произведение которых не больше $-1/n$.

8. Найдите положительные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_{10}, которые при всех $k=1, 2, \ldots, 10$ удовлетворяют условию $(x_1+\ldots+x_k)(x_k+\ldots+x_{10})=1$.

11 класс — Геометрическая интерпретация — 15 октября 2018

0. Решите систему уравнений $\begin{cases} x+y+z=3, \\ x^2+y^2+z^2=3. \end{cases}$

1. Неотрицательные числа a, b, c, A, B, C таковы, что

$$a+A=b+B=c+C=S.$$

Докажите, что

$$aB+bC+cA \leqslant S^2.$$

2. Числа a, b, c, d лежат в интервале $(0,1)$. Докажите, что

$$\sqrt{a^2+(1-b)^2}+\sqrt{b^2+(1-c)^2}+\sqrt{c^2+(1-d)^2}+\sqrt{d^2+(1-a)^2}<4.$$

3. На доске написаны три натуральных числа. Петя записывает на бумажке произведение каких-нибудь двух из этих чисел, а на доске уменьшает третье число на 1. С новыми тремя числами на доске он снова проделывает ту же операцию, и так далее, до тех пор, пока одно из чисел на доске не станет нулем. Чему будет в этот в этот момент равна сумма чисел на Петиной бумажке?

4. Для положительных чисел a, b, c докажите неравенство

$$\sqrt{a^2-ab+b^2}+\sqrt{b^2-bc+c^2} \geqslant \sqrt{a^2+ac+c^2}.$$

5. Дана невозрастающая последовательность неотрицательных чисел

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_{2k+1} \geqslant 0.$$

Докажите неравенство:

$$a_1^2-a_2^2+a_3^2-\ldots+a_{2k+1}^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3-\ldots+a_{2k+1})^2.$$

6. Докажите неравенство

$$\sqrt{99\cdot 101}+\sqrt{98\cdot 102}+\ldots+\sqrt{2\cdot 198}+\sqrt{1\cdot 199}<25\cdot 315.$$

7. Сумма n чисел равна нулю, а сумма их квадратов равна единице. Докажите, что среди этих чисел найдутся два, произведение которых не больше $-1/n$.

8. Найдите положительные числа x_1, x_2, $\ldots$, x_{10}, которые при всех $k=1, 2, \ldots, 10$ удовлетворяют условию $(x_1+\ldots+x_k)(x_k+\ldots+x_{10})=1$.