Определение. Пусть даны множества V («векторы») и поле $\mathbb{K}$ («числа»), имеется операция сложения векторов и для каждого числа имеется операция умножения вектора на число. При этом:

- сложение ассоциативно, коммутативно, существует нейтральный по сложению элемент (нулевой вектор) и у каждого вектора v есть обратный по сложению $-v$;
- $1 \cdot v = v$; $(k_1 k_2) \cdot v = k_1 \cdot (k_2 v)$ (здесь 1, k_1, $k_2 \in \mathbb{K}$, $v \in V$);
- $(k_1 + k_2)v = k_1 v + k_2 v$; $\quad k(v_1 + v_2) = kv_1 + kv_2$.

Тогда V называется *линейным (векторным)* пространством над $\mathbb{K}$.

1. Образуют ли векторные пространства следующие множества (относительно естественных операций):
а) векторы на плоскости; **б)** линейные уравнения вида $a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b$, где $a_1, \ldots, a_n, b \in \mathbb{K}$;
в) многочлены над $\mathbb{K}$; **г)** многочлены степени ровно 2018 над $\mathbb{K}$;
д) многочлены степени не больше 2018 над $\mathbb{K}$; **е)** многочлены с фиксированным корнем α над $\mathbb{K}$;
ё) $\mathbb{R}$ над полем $\mathbb{Q}$; **ж)** $\mathbb{K}^n$ — набор из n чисел поля $\mathbb{K}$;
з) последовательности длины n с нулевой суммой; **и)** неубывающие последовательности над $\mathbb{R}$;
й) бесконечные последовательности из 0 и 1 над $\mathbb{Z}_2$; **к)** множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$;
л) множество функций $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$.

Определение. Подмножество S линейного пространства V называется *подпространством*, если оно само является линейным пространством относительно операций, определённых на V.

2. Рассмотрим пространство векторов на плоскости. Опишите все его подпространства.

Определение. *Линейной комбинацией* векторов $v_1, \ldots, v_n \in V$ называется выражение (или его значение, в зависимости от контекста) вида $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$.

Определение. Пусть S — произвольное подмножество векторов из V. *Линейной оболочкой* $\langle S \rangle$ множества S называется множество всех векторов, которые являются линейной комбинацией конечного числа векторов из S.

3. Докажите, что для произвольного $S \subset V$ множество $\langle S \rangle$ является подпространством. Докажите, что любое подпространство V, целиком содержащее S, содержит и $\langle S \rangle$.

Определение. Говорят, что векторы $v_1, \ldots, v_n \in V$ *линейно независимы*, если из равенства $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ следует, что $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$. В противном случае говорят, что вектора *линейно зависимы*.

4. Докажите следующие утверждения:

- множество векторов, содержащее нулевой вектор, является ЛЗ;
- множество векторов, содержащее пропорциональные векторы, является ЛЗ;
- если множество векторов ЛНЗ, то и любое его подмножество ЛНЗ;
- если множество векторов ЛЗ, то и любое множество, содержащее его, является ЛЗ;
- если линейная оболочка ЛНЗ множества векторов не совпадает с пространством, то к нему можно добавить вектор так, чтобы полученное множество было ЛНЗ.

Определение. Подмножество S линейного пространства V называется *базисом*, если оно линейно независимо и его линейная оболочка совпадает с V.

5. Приведите примеры базисов пространств из пунктов д, ж, з задачи 1.

Теорема. Следующие утверждения равносильны:

- S — базис пространства V;
- S — линейно независимая система векторов и $\langle S \rangle = V$;
- S — линейно независимая система векторов, но теряет это свойство при добавлении любого вектора из V;
- $\langle S \rangle = V$, но при выкидывании любого вектора из S это свойство теряется.