

Метод математической индукции

1. Ученик Коля Васин при помощи метода математической индукции смог доказать, что в любом табуне все лошади одной масти. Если есть только одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Для индуктивного перехода предположим, что есть n лошадей (с номерами от 1 до n). По индуктивному предположению лошади с номерами от 1 до $n - 1$ одинаковой масти. Аналогично лошади с номерами от 2 до n также имеют одинаковую масть. Но лошади с номерами от 2 до $n - 1$ не могут менять свою масть в зависимости от того как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому все n лошадей должны быть одинаковой масти. Есть ли ошибка в этом рассуждении, и если есть, то какая?
2. Докажите, что трёхкопеечными и пятикопеечными монетами можно выдать любую сумму, большую 7 копеек.
3. У бородатого многоугольника во внешнюю сторону растёт щетина. Его пересекает несколько прямых, на каждой из которых с одной из сторон тоже растёт щетина. В результате многоугольник оказался разбитым на некоторое число частей. Докажите, что хотя бы у одной из частей вся борода окажется снаружи.
4. Докажите, что если плоскость разбита на части **a)** прямыми, **b)** прямыми и окружностями, то получившуюся карту можно раскрасить в два цвета так, что части, граничащие по дуге или отрезку, будут разного цвета.
5. *Да, эта задача была в предыдущем листочке. Но, как говорит Ю. Ким устами Остапа Бендера: «Вы оцените красоту игры!»* Максим умеет делить любой отрезок либо пополам, либо в отношении $n : n + 1$, где n — любое натуральное число. Докажите, что Максим может поделить отрезок на любое количество равных частей.
6. Есть три стержня и несколько колец разного размера (изначально все кольца на одном стержне). Класть можно только кольцо меньшего размера на кольцо большего размера. Можно ли переместить всю башню с одного стержня на другой, если всего **(a)** 3 кольца? **(b)** n колец?
7. Существует ли конечное слово из букв русского алфавита, в котором нет двух соседних одинаковых подслов, но таковые появляются при приписывании (как справа, так и слева) любой буквы русского алфавита? Словом мы называем любую последовательность букв русского алфавита, не обязательно осмысленную, подсловом называется любой фрагмент слова. Например, АБВШГАБ — слово, а АБВ, Ш, ШГАБ — его подслова.