

## Деление с остатком

7 класс, вторая страта

29.11.17

1. Изменяются ли частное и остаток, если делимое и делитель увеличить в 3 раза?
2. Какие остатки при делении на 3 может давать число, если известно, что оно – полный квадрат?
3. Найдите все натуральные числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.
4. (а) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 3 его суммы цифр.  
(б) Докажите, что остаток от деления натурального числа на 3 равен остатку от деления на 9 его суммы цифр.  
(с) Выведите из этого признаки делимости на 3 и на 9.
5. Найдите остаток от деления  $2^{100}$  на 3
6. Найдите остаток от деления:  
(а)  $1001 \cdot 1002 \cdot 1003 + 2001 \cdot 2002 \cdot 2003 \cdot 2004$  на 1000;  
(б)  $2015 \cdot 2014 \cdot 2013 + 2017 \cdot 2018 \cdot 2019$  на 2016;  
(с)  $1 + 5 + 5^2 + \dots + 5^{1013}$  на 6.
7. Пусть  $x^2 + y^2 = z^2$ .  
(а) Докажите, что хотя бы одно из чисел делится на 3;  
(б) Докажите, что  $xy$  делится на 12;  
(с) Докажите, что  $xyz$  делится на 60.
8. Пусть  $a + b + c$  делится на 6. Докажите, что  $a^3 + b^3 + c^3$  делится на 6.
9. На доске написаны 1 и 2. Каждую минуту Петя умножает два самых больших числа, написанных на доске, прибавляет к ним 1 и записывает получившееся число на доску. Докажите, что Петя никогда не запишет число, делящееся на 4.
10. Пусть  $a$  и  $b$  натуральные числа, такие что  $a^2 + b^2$  делится на 21. Докажите, что  $a^2 + b^2$  делится и на 441.
11. Пусть  $p$ ,  $4p^2 + 1$ ,  $6p^2 + 1$  – простые числа. Найдите  $p$ .
12. Какую цифру надо поставить вместо звездочки в числе  $123456789 * 987654321$  чтобы полученное число делилось на 37?
13. Докажите, что существует бесконечно много натуральных чисел, не представимых в виде суммы трёх кубов.
14. Будем называть число почти квадратом, если оно либо точный квадрат, либо точный квадрат, умноженный на простое число. Может ли 8 почти квадратов идти подряд?