Кружок 1568. 8 класс.
6 занятие.

Делимость-2. Остатки.

Определение. Число r называется остатком a при делении на b, если a=bq+r, где a,b,q,r- целые и $0 \leqslant r < b$.

Действия с остатками Пусть число a_1 дает при делении на b остаток r_1, число a_2 – остаток r_2. Тогда

а) *(сложение остатков)* Число a_1+a_2 при делении на b дает тот же остаток, что и число r_1+r_2.

б) *(вычитание остатков)* Число $a_1–a_2$ при делении на b дает тот же остаток, что и число $r_1–r_2$.

в) *(умножение остатков)* Число a_1a_2 при делении на b дает тот же остаток, что и число r_1r_2.

1. Найдите остаток при делении на 7 а) 6789^{34} б)143^{45} в)$4561^{33}+234^{67}$ г)$478^{68} * 234^{123}$
2. Какие остатки при делении на 4 может давать квадрат целого числа?
3. Имеют ли решения уравнения

   а) $x^2+y^2=2011$ б)$x^2+3y^2=1769$ в)$15x^2–7y^2=9$ г) $x^2+y^2+z^2=8t–1$?
4. Докажите, что нельзя составить квадрат натурального числа, используя только цифры 2, 3, 7 и 8.
5. а) Какие остатки может давать куб целого числа на а) 7; б) 9?
   б) Докажите, что число 107 нельзя представить в виде суммы двух точных кубов.
   в) $(a^3+b^3+c^3)$ делится на 63. Докажите, что abc делится на 21.
6. а) Назовем натуральное n удобным, если n^2+1 делится на 2501. Докажите, что среди 1,.., 2500 четное количество удобных чисел.
   б)Докажите, что среди 51 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100
7. а)Может ли число $a^2+b^2+c^2$ делится на 5, если ни одно из чисел *a, b, c* не делится на 5?
   б)Докажите, что для любого целого числа A по крайней мере одно из чисел A^3+A и A^3-A делится на 10.
8. Пусть $P_n= p_1p_2...p_n$ — произведение первых n простых чисел (n>1). Докажите, что а) P_n-1 б) P_n+1 не является полным квадратом.
9. Шайка разбойников отобрала у купца мешок с монетами. Каждая монета стоит целое число грошей. Оказалось, что какую монету не отложи, оставшиеся монеты можно поделить между разбойниками так, что каждый получит одинаковую сумму. Докажите, что число монет без одной делится на число разбойников в шайке.

Домашнее задание.
1. Найдите последнюю цифру а) 1763^{345} б) 3567^{245}
2. Докажите, что n(n-1)(n+1) делится на 6 для любого натурального n.