# Вспоминаем сравнение по модулю

*7–8 класс*

*23.01.18*

**Определение.** Целые числа $a$ и $b$ называются *сравнимыми по модулю* $m$ если число $a-b$ делится на $m$. Обозначается это так: $a \equiv b \pmod{m}$ или $a \underset{m}{\equiv} b$.

**Свойства сравнений:**

**(a)** $a \equiv r \pmod{m}$, где $r$ — остаток числа $a$ при делении на $m$.
**(b)** $a \equiv a + km \pmod{m}$ для любого целого числа $k$.
**(c)** Если $a \equiv b \pmod{m}$, $b \equiv c \pmod{m}$, то $a \equiv c \pmod{m}$.
**(d)** Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm c \pmod{m}$.
**(e)** Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{m}$.
**(f)** Если $a \equiv b \pmod{m}$, то $ac \equiv bc \pmod{m}$;
**(g)** Если $a \equiv b \pmod{m}$ и $c \equiv d \pmod{m}$, то $ac \equiv bd \pmod{m}$.
**(h)** Если $a \equiv b$, то $a^n \equiv b^n \pmod{m}$, для любого натурального числа $n$.

**Задачи на разбор.**

**1.** Найдите остаток от деления **(a)** $6^{2018}$ на 7; **(b)** $10^{2018}$ на 7;

**2.** Найдите остаток от деления $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017$ на 2018.

**Задачи для самостоятельного решения**.

**1.** Найдите остаток от деления $7^{2018}$ на 11.

**2.** Найдите остаток от деления
**(a)** $2014 \cdot 2015 \cdot 2016 \cdot 2017 \cdot 2018$ на 11;
**(b)** $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99 + 1 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 100$ на 101.

**3.** Найдите остатки от деления $47^{101}$ на 31.

**4.** Докажите, что $2^{50}+1$ делится на 125.

**5.** Найдите остаток от деления: **(a)** $9^{2017}+13^{2017}$ на 11; **(b)** $9^{2018}+13^{2018}$ на 11.

**6.** **(a)** Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{5}$.
**(b)** Докажите, что $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{13}$.
**(c)** Найдите еще одно простое число $p$, для которого $2^{100} \equiv 3^{100} \pmod{p}$.

**7.** Докажите, что $1^{99}+2^{99}+3^{99}+\ldots+100^{99}$ делится на 101.

**8.** Докажите, что при любом натуральном $n$ число $16^{n+2}+23^{n+1}+37^n$ делится на 7.

**9.** Докажите, что при любом натуральном $n$ число $11^{n+2}+12^{2n+1}$ делится на 133.

**10.** Докажите, что число $(5^n-1)^n-6$ делится на $5^n-6$.