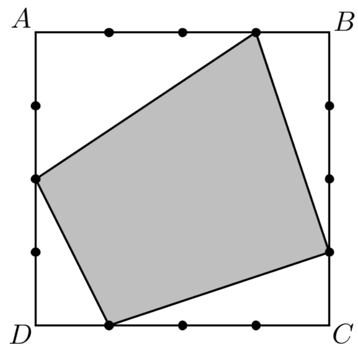
Начинающие

1. Каждая сторона квадрата $ABCD$ со стороной 4 поделена на равные части тремя точками. На каждой стороне выбрано по одной из этих точек. Выбранные точки последовательно соединены таким образом, что получился четырёхугольник. Чему может быть равна площадь этого четырёхугольника? Выпишите все возможные значения площади, обосновывать ответ не требуется.

(Hirad Aalipanah)



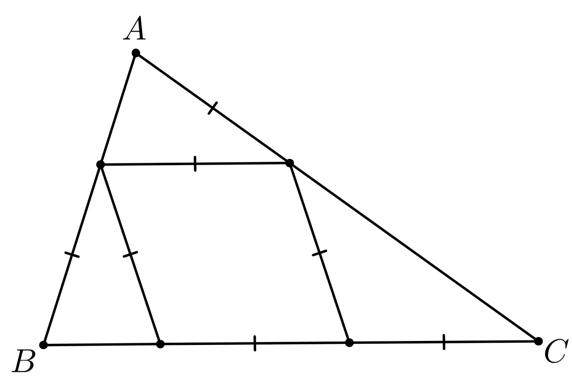
Ответ. 6, 7, 7.5, 8, 8.5, 9, 10.

Решение. Для того, чтобы найти площадь четырехугольника, достаточно найти суммарную площадь четырех прямоугольных треугольников и вычесть полученную величину из площади квадрата. Отсюда легко получить все возможные ответы.

Критерии. *Пусть X — число правильных ответов, Y — число неправильных ответов. Тогда число баллов за задачу равно* $\min(1, X) \cdot \max(0, X - Y + 1)$.

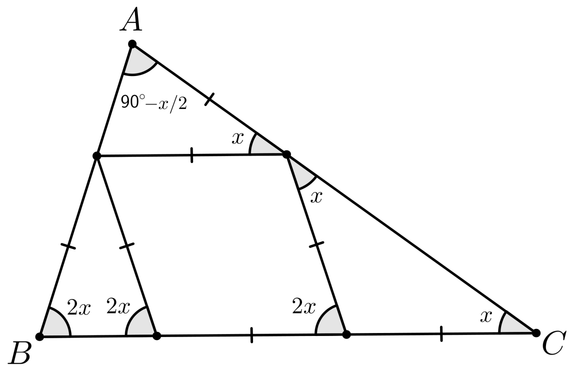
2. Найдите углы треугольника ABC.

(Morteza Saghafian)



Ответ. $\angle A = 72°$, $\angle B = 72°$, $\angle C = 36°$.

Решение. Обозначим $\angle ACB = x$. Четырехугольник с равными сторонами внутри треугольника ABC — ромб, следовательно, его противоположные стороны параллельны.



Несложно посчитать углы, как указано на рисунке. Запишем сумму углов треугольника ABC:

$$\left(90^\circ - \frac{x}{2}\right) + 2x + x = 180^\circ \Rightarrow x = 36^\circ \Rightarrow \angle A = 72^\circ, \angle B = 72^\circ, \angle C = 36^\circ.$$

Критерии.

Рассмотрен ромб и сделан вывод о параллельности его сторон — 2 балла.

Выполнен подсчёт углов (как на картинке) — 3 балла.

Вычислены углы треугольника ABC — 3 балла.

3. В правильном пятиугольнике $ABCDE$ прямая, проходящая через точку C перпендикулярно CD, пересекает отрезок AB в точке F. Докажите, что $AE + AF = BE$.

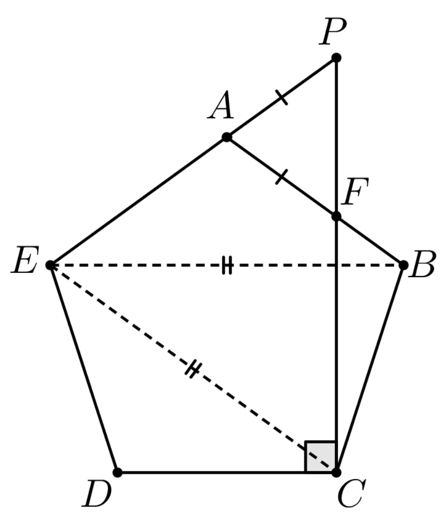
(Alireza Cheraghi)

Решение. Обозначим через P точку пересечения прямых AE и FC. Нам известно, что

$$\angle ECD = 36^\circ \Rightarrow \angle ECP = 54^\circ, \angle AEC = 72^\circ \Rightarrow \angle EPC = 54^\circ.$$

Откуда треугольник EPC равнобедренный и $CE = PE$. С другой стороны, мы знаем, что $\angle ECB = \angle EBC = 72^\circ$. Поэтому $BE = CE = PE$. Также $\angle EAB = 108^\circ$, откуда $\angle AFP = \angle APF = 54^\circ$. Это значит, что $AF = AP$. Окончательно, имеем следующую цепочку равенств:

$$AE + AF = AE + AP = PE = CE = BE.$$



Критерии.

$AP = AF$ — 3 балла.

$CE = EF$ — 2 балла.

$BE = CE$ — 1 балл.

Завершение доказательства — 2 балла.

4. На плоскости расположены точки P_1, $P_2, \ldots, P_{100}$, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Для любой тройки точек P_i, P_j, P_k $(i < j < k)$ назовем образованный ими треугольник *правильно ориентированным*, если обход из точки P_i по отрезкам P_iP_j, P_jP_k, P_kP_i происходит в направлении по часовой стрелке. Может ли количество правильно ориентированных треугольников быть равно в точности 2017?

(Morteza Saghafian)

Решение. Сначала предположим, что точки $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ расположены на окружности и упорядочены против часовой стрелки. В этом случае количество правильно ориентированных треугольников равно нулю. Далее, начнем двигать точки. В тот момент, когда точка P_i пересекает прямую P_jP_k, состояние треугольника $P_iP_jP_k$ меняется (из неправильно ориентированного треугольник становится правильно ориентированным), а состояние других треугольников не меняется (допустим, что точки двигаются таким образом, что ни одна из точек не пересекает две прямые одновременно). Таким образом, количество правильно ориентированных треугольников меняется на единицу. Предположим, что точки $P_1, P_2, \ldots, P_{100}$ передвинулись так, что оказались упорядочены по часовой стрелке. В этом случае количество правильно ориентированных треугольников равняется C_{100}^3, что больше, чем 2017. На протяжении всего процесса количество правильно ориентированных треугольников меняется каждый раз на единицу. Поэтому наступит момент, когда количество нужных треугольников равно в точности 2017.

Критерии.

Случай упорядочевания точек против часовой стрелки — 1 балл.

Количество правильно ориентированных треугольников меняется на единицу в процессе движения точек — 4 балла.

Случай упорядочения по часовой стрелке — 1 балл.

Завершение доказательства (существует момент, когда правильно ориентированных треугольников ровно 2017) — 2 балла.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC $(AB = AC)$. Пусть l — прямая, проходящая через точку A параллельно BC, D — произвольная точка на прямой l. Обозначим через E и F основания перпендикуляров, опущенных из точки A на BD и CD соответственно. Пусть P и Q — проекции точек E и F на прямую l. Докажите, что $AP + AQ \leqslant AB$.

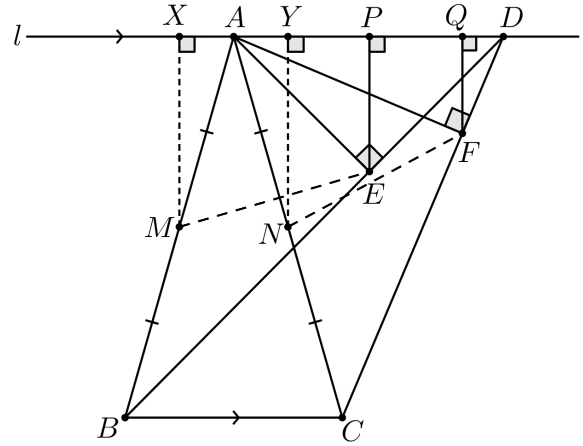
(Morteza Saghafian)

Решение 1. Обозначим через M и N середины отрезков AB и AC соответственно. Имеем следующее:

$$\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ \Rightarrow ME = NF = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2}.$$

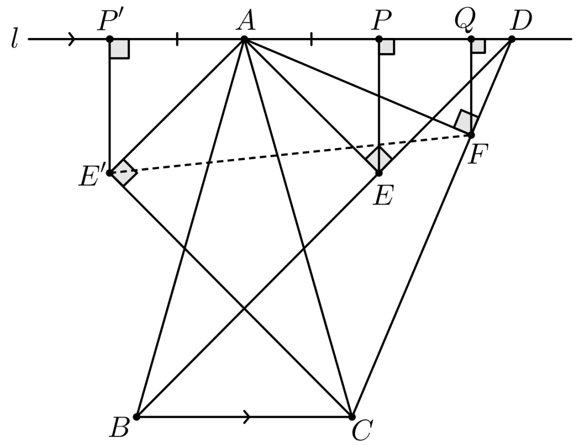
Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямую l соответственно. Мы знаем, что треугольники AMX и ANY равны, поэтому $AX = AY$.

$$XP = AX + AP \leqslant ME = \frac{AB}{2},\ AQ - AY = YQ \leqslant NF = \frac{AC}{2} \Rightarrow AP + AQ \leqslant AB.$$



Решение 2. Пусть точки P' и E' симметричны точкам P и E относительно серединного перпендикуляра к BC. Тогда $AP' = AP$. Поскольку $\angle AE'C = \angle AFC = 90^\circ$, поэтому четырёхугольник $AE'CF$ — вписанный, причём AC является его диаметром. Отсюда $FE' \leqslant AC$. Окончательно имеем

$$AP + AQ = AP' + AQ = QP' \leqslant FE' \leqslant AC = AB.$$



Критерии.

По решению 1:

Рассмотрены середины AB, AC и их проекции на l — 2 балла.

Упомянуты неравенства для отрезков ME и NF — 2 балла.

Финальные вычисления и завершение доказательства — 4 балла.

По решению 2:

Рассмотрены отражения P и E (возможно, D) и представление $AP + AQ$ в виде длины отрезка ($P'Q$ в решении) — 3 балла.

$P'Q \leqslant E'F$ — 2 балла.

$E'F \leqslant AC$ — 3 балла.

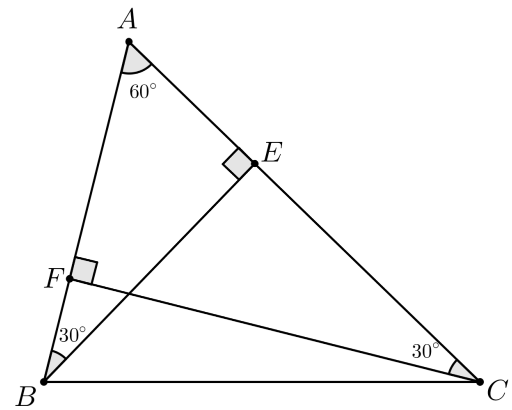
Продолжающие

1. В остроугольном треугольнике ABC угол A равен $60°$. Пусть E и F — основания высот из вершин B и C соответственно. Докажите, что $CE - BF = \frac{3}{2}(AC - AB)$.

(Fatemeh Sajadi)

Решение. Поскольку $\angle A = 60°$, то $AE = \frac{AB}{2}$, $AF = \frac{AC}{2}$. Откуда получаем, что

$$CE - BF = (AC - AE) - (AB - AF) = (AC - AB) + (AF - AE) = \frac{3}{2}(AC - AB).$$



Критерии.

В прямоугольном треугольнике сторона, противоположная углу в $30°$, равна половине гипотенузы — 1 балл.

Вычисление CE — 1 балл.

Вычисление BF — 1 балл.

Финальные вычисления и вывод — 5 баллов.

2. Окружности ω_1 и ω_2 пересекаются в точках A и B. Произвольная прямая, проходящая через B, пересекает ω_1 и ω_2 в точках C и D соответственно. Точки E и F выбраны на ω_1 и ω_2 соответственно так, что $CE = CB$ и $BD = DF$. Пусть прямая BF пересекает ω_1 в точке P, а прямая BE пересекает ω_2 в точке Q. Докажите, что точки A, P, Q лежат на одной прямой.

(Iman Maghsoudi)

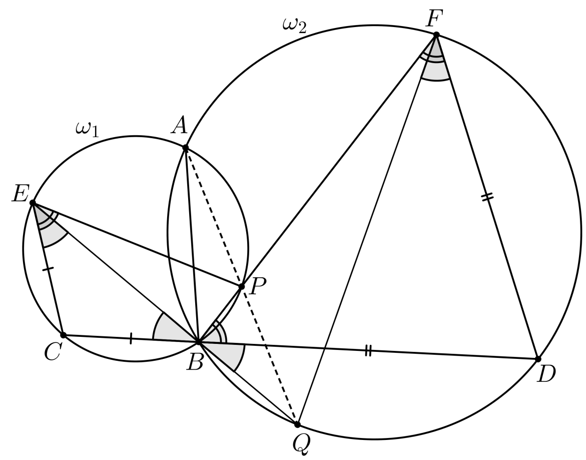
Решение. Заметим, что $\angle BFD = \angle DBF = 180° - \angle CBP = \angle CEP$. Отсюда имеем

$$\angle CEB + \angle BEP = \angle BFQ + \angle QFD.$$

Из цепочки равенств $\angle CEB = \angle CBE = \angle QBD = \angle QFD$ следует

$$\angle BEP = \angle BFQ \Rightarrow \angle BAP = \angle BEP = \angle BFQ = \angle BAQ.$$

Поэтому точки A, P, Q лежат на одной прямой.



Критерии.

$\angle BFD = \angle CEP$ *— 2 балла.*

$\angle BEP = \angle BFQ$ *— 2 балла.*

Завершение доказательства — 4 балла.

3. На плоскости даны n точек ($n > 2$), никакие три из которых не лежат на одной прямой. Через каждые две из них проведена прямая, а среди остальных $n-2$ точек отмечена ближайшая к этой прямой точка (оказалось, что во всех случаях эта точка единственная). Какое наибольшее число точек может быть отмечено для каждого n?

(Борис Френкин)

Ответ. Если $n = 4$, то 3 точки, в остальных случаях n точек.

Решение. Случай $n = 3$ очевиден. Для $n > 4$ рассмотрим правильный n-угольник и слегка пошевелим его таким образом, чтобы выполнялись предположения задачи. Каждая точка является ближайшей к прямой, соединяющей две соседние вершины (это напрямую доказывается счетом углов).

Пусть $n = 4$. Среди четырёх треугольников с вершинами в этих точках, выберем треугольник ABC наименьшей площади (площади никаких двух треугольников не могут быть равны, иначе расстояния до общей стороны от двух оставшихся точек будут равны). Тогда ближайшей точкой к прямой AB будет точка C, к AC — точка B, к BC — точка A. Таким образом, оставшаяся точка отмечена не будет.

Критерии.

Приведённый и обоснованный пример для $n > 4$ *— 3 балла.*

(Верный пример без упоминания нюансов — 2 балла.)

В случае $n = 4$ *рассмотрен выпуклый четырехугольник — 3 балла.*

В случае $n = 4$ *рассмотрен невыпуклый четырехугольник — 2 балла.*

Рассмотрение случая $n = 3$ *отдельно не оценивается, однако если участник не разобрал этот случай — -1 балл.*

4. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$). Пусть l — прямая, проходящая через точку A параллельно BC, D — произвольная точка на прямой l. Обозначим через E и F основания перпендикуляров, опущенных из точки A на BD и CD соответственно. Пусть P и Q — проекции точек E и F на прямую l. Докажите, что $AP + AQ \leqslant AB$.

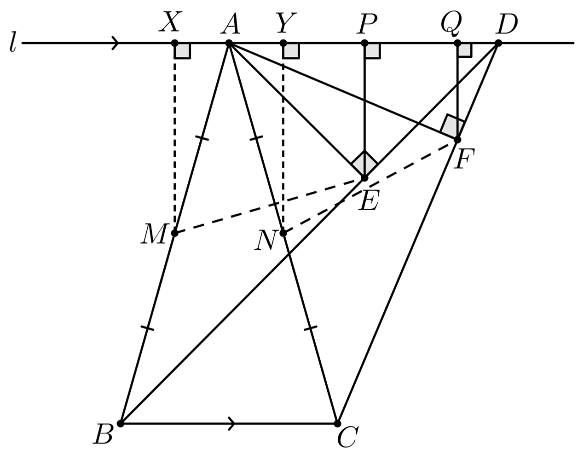
(Morteza Saghafian)

Решение 1. Обозначим через M и N середины отрезков AB и AC соответственно. Имеем следующее:

$$\angle AEB = \angle AFC = 90^\circ \Rightarrow ME = NF = \frac{AB}{2} = \frac{AC}{2}.$$

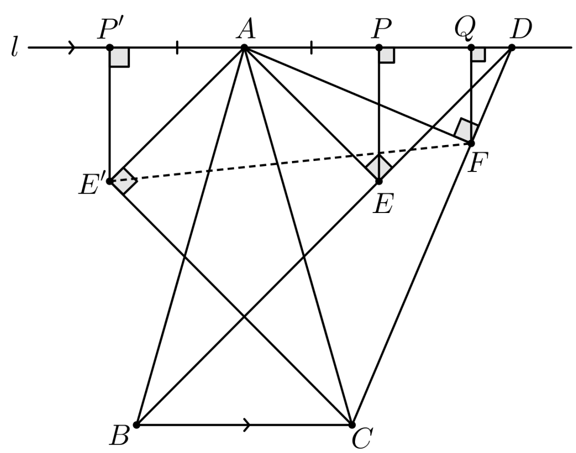
Пусть X и Y — основания перпендикуляров, опущенных из точек M и N на прямую l соответственно. Мы знаем, что треугольники AMX и ANY равны, поэтому $AX = AY$.

$$XP = AX + AP \leqslant ME = \frac{AB}{2},\ AQ - AY = YQ \leqslant NF = \frac{AC}{2} \Rightarrow AP + AQ \leqslant AB.$$



Решение 2. Пусть точки P' и E' симметричны точкам P и E относительно серединного перпендикуляра к BC. Тогда $AP' = AP$. Поскольку $\angle AE'C = \angle AFC = 90^\circ$, поэтому четырёхугольник $AE'CF$ — вписанный, причём AC является его диаметром. Отсюда $FE' \leqslant AC$. Окончательно имеем

$$AP + AQ = AP' + AQ = QP' \leqslant FE' \leqslant AC = AB.$$



Критерии.

По решению 1:

Рассмотрены середины AB, AC и их проекции на l — 2 балла.

Упомянуты неравенства для отрезков ME и NF — 2 балла.

Финальные вычисления и завершение доказательства — 4 балла.

По решению 2:

Рассмотрены отражения P и E (возможно, D) и представление $AP + AQ$ в виде длины отрезка ($P'Q$ в решении) — 3 балла.

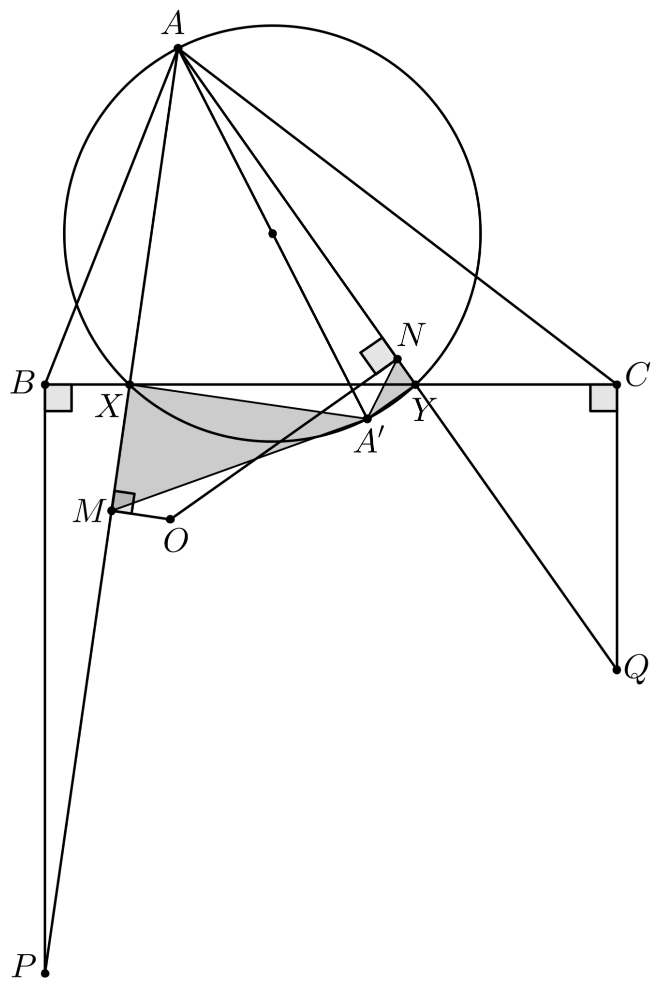
$P'Q \leqslant E'F$ — 2 балла.

$E'F \leqslant AC$ — 3 балла.

5. Пусть X и Y — точки на стороне BC треугольника ABC такие, что $2XY = BC$ (X лежит между B и Y). Пусть AA' — диаметр описанной окружности треугольника AXY. Обозначим через P точку пересечения прямой AX и прямой, проходящей через B перпендикулярно BC, а через Q обозначим точку перечесения прямой AY и прямой, проходящей через C перпендикулярно BC. Докажите, что касательная, проведенная из A' к описанной окружности треугольника AXY, проходит через центр описанной окружности треугольника APQ.

(Iman Maghsoudi)

Решение. Пусть точки O, M, N — центр описанной окружности треугольника APQ, середина AP, середина AQ соответственно. Поскольку $\angle OMA = \angle ONA = 90°$, то четырёхугольник $AMON$ вписан. Необходимо доказать, что $\angle OA'A = 90°$, что равносильно вписанности пятиугольника $AMOA'N$. Достаточно доказать, что четырехугольник $AMA'N$ вписан, что равносильно равенству $\angle A'MX = \angle A'NY$. Мы покажем, что треугольники $\triangle A'NY$ и $\triangle A'XM$ подобны.



Четырехугольник $AXA'Y$ вписанный, поэтому $\angle A'XM = \angle A'YN = 90°$. Поэтому достаточно показать, что

$$\frac{A'X}{MX} = \frac{A'Y}{NY}. \tag{1}$$

Пусть H, K, M', N' — основания перпендикуляров, опущенных из точек A, A', M, N на прямую BC соответственно. Поскольку M и N — середины отрезков AP и AQ, то

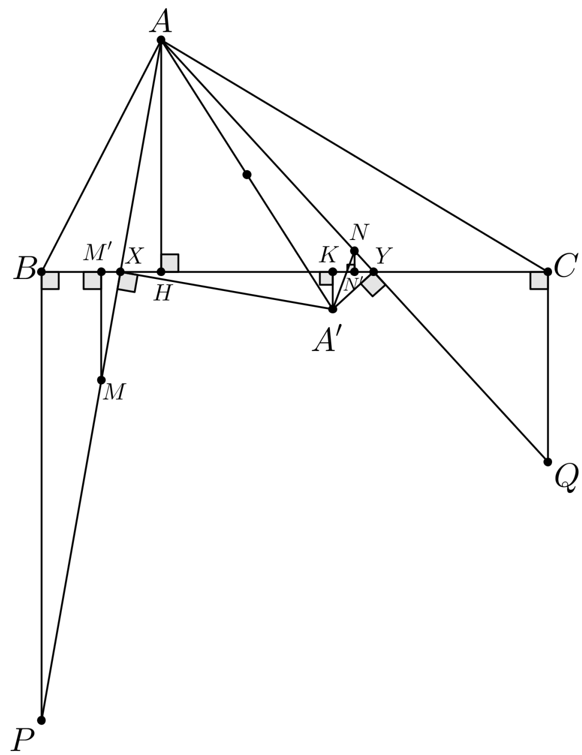
$$BM' = HM' \Rightarrow XM' = HM' - XH = \frac{BH}{2} - XH. \tag{2}$$

Аналогично из равенства $CN' = HN'$ получаем:

$$YN' = HY - HN' = HY - \frac{CH}{2} = (XY - XH) - \frac{BC - BH}{2}.$$

Поэтому

$$YN' = \left(XY - \frac{BC}{2}\right) + \left(\frac{BH}{2} - XH\right) = \frac{BH}{2} - XH. \qquad (3)$$



Из (2) и (3) следует, что $XM' = YN'$. С другой стороны, AA' является диаметром описанной около треугольника AXY окружности, поэтому

$$\angle A'YA = \angle A'XA = 90^\circ \Rightarrow \angle KA'Y = \angle NYN', \angle KA'X = \angle MXM',$$

откуда получаем подобие пар треугольников $\triangle A'KX$ и $\triangle XM'M$, $\triangle A'KY$ и $\triangle YN'N$. Из этого подобия следует цепочка соотношений

$$\frac{A'X}{MX} = \frac{A'K}{XM'}, \; \frac{A'K}{N'Y} = \frac{A'Y}{NY} \Rightarrow \frac{A'X}{MX} = \frac{A'Y}{NY},$$

которая доказывает соотношение (1), а, следовательно, и подобие треугольников $\triangle A'NY$ и $\triangle A'XM$.

Критерии.

Упомянуто равносильное утверждение о вписанности $AMOA'N$ — 1 балл.

Подобие треугольников $A'KX$ и $XM'M$ — 2 балла.

Подобие треугольников $A'KY$ и $YN'N$ — 2 балла.

Подобие треугольников $A'NY$ и $A'XM$ и завершение доказательства — 3 балла.

Профессионалы

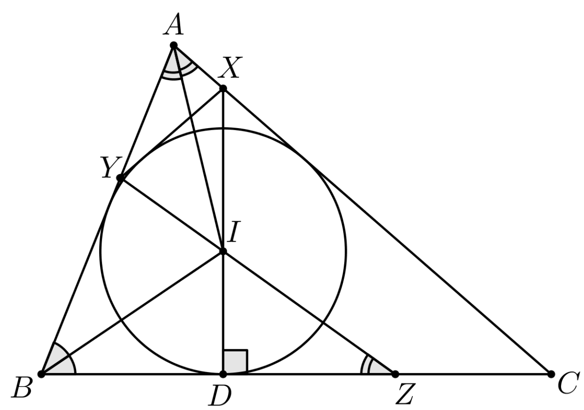
1. Вписанная окружность треугольника ABC с центром I касается стороны BC в точке D. Прямая DI пересекает прямую AC в точке X. Касательная, проведенная из точки X к вписанной окружности (и отличная от AC), пересекает прямую AB в точке Y. Пусть прямые YI и BC пересекаются в точке Z. Докажите, что $AB = BZ$.

(Hooman Fattahimoghaddam)

Решение. В треугольнике AXY точка I является центром вневписанной окружности, поэтому $\angle XIY = 90^\circ - \angle\frac{A}{2}$. Отсюда

$$\angle DIZ = 90^\circ - \angle\frac{A}{2} \Rightarrow \angle IZB = \angle\frac{A}{2} = \angle BAI.$$

Заметим, что треугольники ABI и ZBI равны ($\angle IZB = \angle BAI$, $\angle IBZ = \angle IBA$, BI — общая). Таким образом, $AB = BZ$.



Критерии.

Вычислен $\angle XIY$ — 2 балла.

Вычислен $\angle IZB$ — 2 балла.

Равенство треугольников BIZ и BIA и завершение доказательства — 4 балла.

2. Даны шесть попарно непересекающихся кругов, радиус каждого из которых не меньше 1. Докажите, что радиус любой окружности, пересекающей все шесть кругов, также не меньше 1.

(Mohammad Ali Abam, Morteza Saghafian)

Решение. Обозначим центры этих шести кругов через $O_1, O_2, \ldots, O_6$, а их радиусы — через $R_1, R_2, \ldots, R_6$. Предположим, что окружность с центром O и радиусом R пересекает все шесть окружностей. Тогда очевидно, что существуют i и j такие, что $\angle O_iOO_j \leqslant 60^\circ$. Длина отрезка O_iO_j не меньше $R_i + R_j$, а длины отрезков OO_i и OO_j не превосходят $R_i + R$ и $R_j + R$ соответственно. Если $R < 1$, то

$$R_i + R < R_i + R_j,\ R_j + R < R_i + R_j,$$

поэтому самой длинной стороной треугольника O_iOO_j является O_iO_j, откуда $\angle O_iOO_j > 60^\circ$, противоречие. Поэтому $R \leqslant 1$.

Критерии.

Полное решение (официальное) — 8 баллов.

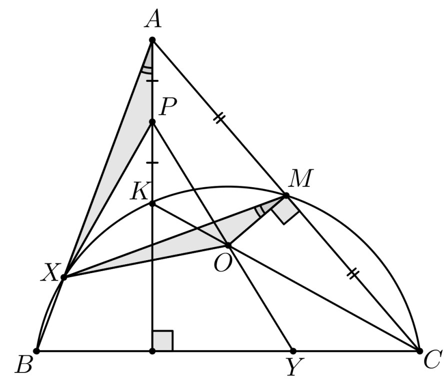
Сведение задачи к случаю шести единичных кругов — 3 балла.

Доказан только случай шести единичных кругов — 5 баллов.

3. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Прямая CO пересекает высоту, проведенную из вершины A, в точке K. Пусть P и M — середины отрезков AK и AC соответственно. Пусть прямые PO и BC пересекаются в точке Y, а описанная окружность треугольника BCM вторично пересекает прямую AB в точке X. Докажите, что четырехугольник $BXOY$ вписанный.

(Ali Daeinabi, Hamid Pardazi)

Решение. Мы хотим показать, что $\angle XOP = \angle B$. Поскольку $\angle B = \angle XMA$, то $\angle XMO = 90^\circ - \angle B = \angle XAK$. Докажем, что треугольники XOP и XMA подобны. Для этого достаточно показать, что треугольники XPA и XOM подобны, а поскольку $\angle XMO = \angle XAK$, то достаточно доказать, что $\frac{AX}{XM} = \frac{AP}{OM}$.



Четырехугольник $BXMC$ вписанный, поэтому $\triangle AXM \sim \triangle ACB$, откуда

$$\frac{AX}{XM} = \frac{AC}{BC}. \tag{4}$$

Поскольку, $\angle OCA = 90^\circ - \angle B = \angle BAK$, то $\angle AKC = 180^\circ - \angle A$. Из теоремы синусов для треугольника AKC имеем

$$\frac{AC}{\sin\angle A} = \frac{AK}{\sin(90^\circ - \angle B)}.$$

Воспользовавшись равенством $OM = OC \cdot \sin(90^\circ - \angle B)$ и теоремой синусов для треугольника ABC, имеем

$$\frac{AK}{OM} = \frac{AC}{OC \cdot \sin\angle A} \Rightarrow \frac{AP}{OM} = \frac{AC}{2OC \cdot \sin\angle A} = \frac{AC}{BC}. \tag{5}$$

Из соотношений (4) и (5) следует, что треугольники XPA и XOM подобны. Отсюда треугольники XOP и XMA также подобны, следовательно, $\angle XOP = \angle XMA = \angle B$.

Критерии.

Подобие треугольников XOM и XPA — 4 балла.

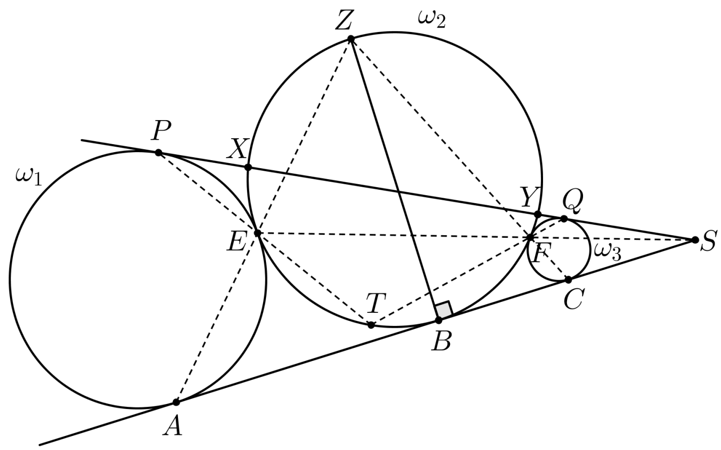
Завершение доказательства — 4 балла.

4. Окружности ω_1, ω_2 и ω_3 касаются прямой l в точках A, B и C соответственно (B лежит между A и C), ω_2 внешним образом касается двух других окружностей. Пусть X и Y — точки пересечения ω_2 со второй общей внешней касательной окружностей ω_1 и ω_3. Перпендикуляр, проведённый через точку B к прямой l, вторично пересекает ω_2 в точке Z. Докажите, что окружность, построенная на AC как на диаметре, касается ZX и ZY.

(Iman Maghsoudi, Siamak Ahmadpour)

Решение. Пусть S — пересечение XY и l. Предположим, что ω_1 и ω_2 касаются в точке E, а ω_2 и ω_3 касаются в точке F. Точка S — центр положительной гомотетии для окружностей ω_1 и ω_3, а точки E и F — центры отрицательных гомотетий для пар окружностей ω_1 и ω_2, ω_2 и ω_3 соответственно, поэтому E, F и S лежат на одной прямой. Пусть прямая XY касается ω_1 и ω_2 в точках P и Q соответственно. Тогда выполнены равенства

$$SE \cdot SF = SP \cdot SQ = SA \cdot SC.$$

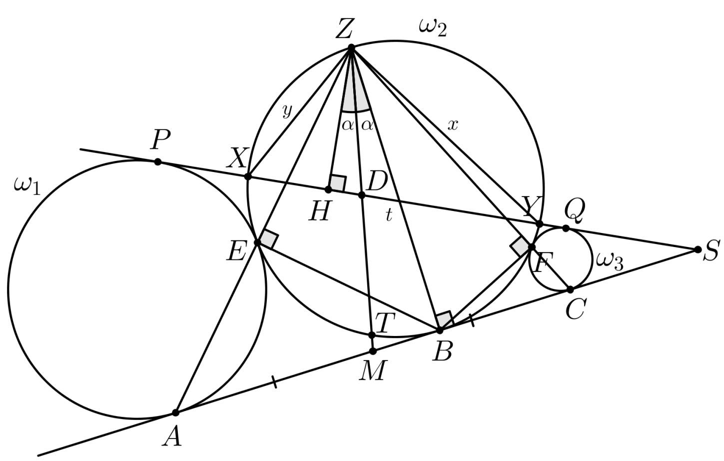


Таким образом, четырехугольники $PEFQ$ и $AEFC$ вписаны. Пусть T — середина дуги XY окружности ω_2 (не содержащей точку Z). Мы знаем, что прямая, касающаяся ω_2 в точке T, параллельна XY, поэтому точки T, E и P лежат на одной прямой. Аналогично точки T, Q и F лежат на одной прямой. Поскольку прямая, касающаяся ω_2 в точке Z, параллельна l, то точки Z, E и A лежат на одной прямой. Аналогично точки Z, F и C лежат на одной прямой. Тогда выполнены равенства

$$TE \cdot TP = TF \cdot TQ, \ ZE \cdot ZA = ZF \cdot ZC,$$

откуда ZT — радикальная ось окружностей ω_1 и ω_3. Таким образом, если M — середина отрезка AC, то Z, T и M лежат на одной прямой, так как M также принадлежит радикальной оси окружностей ω_1 и ω_3. Пусть D — пересечение ZM и PQ, а H — основание перпендикуляра из Z на PQ. Тогда

$$\angle HZD = \angle MZB = \frac{|\angle ZXY - \angle ZYX|}{2} = \alpha.$$



Пусть $x = ZY$, $y = ZX$, $t = XY$. Тогда

$$AM = \frac{ZB}{\cos\alpha} = \frac{ZB}{ZH\colon ZD} = \frac{ZB}{ZH} \cdot ZD = \frac{ZB}{ZH} \cdot \frac{2xy}{x+y} \cdot \cos\frac{\angle XZY}{2}.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что расстояния от точки M до прямых ZX и ZY равно $\frac{AC}{2}$. Таким образом, необходимо показать, что

$$AM \cdot \sin\frac{\angle XZY}{2} = \frac{AC}{2}.$$

Это условие равносильно следующему:

$$2AM \cdot \sin\frac{\angle XZY}{2} = \frac{ZB}{ZH} \cdot \frac{2xy}{x+y} \cdot \sin\angle XZY = AC.$$

С другой стороны, имеем

$$S_{\triangle XYZ} = \frac{1}{2} \cdot t \cdot ZH = \frac{1}{2} \cdot xy \cdot \sin \angle XZY \Rightarrow t = \frac{xy \cdot \sin \angle XZY}{ZH},$$

поэтому достаточно показать, что

$$AC = \frac{2t \cdot ZB}{x+y}.$$

Мы знаем, что

$$\angle BFZ = \angle BEZ = 90^\circ \Rightarrow ZB^2 = ZE \cdot ZA = ZF \cdot ZC.$$

Поэтому длины отрезков касательных из Z к ω_1 и ω_3 равны ZB. Теперь, согласно теореме Кэзи для двух вписанных четырехугольников $ZY\omega_1 X$ и $ZX\omega_3 Y$ мы можем утверждать, что

$$ZY\omega_1X\colon x \cdot PX + y \cdot (t + PX) = t \cdot ZB \Rightarrow (x+y)PX + yt = t \cdot ZB,$$

$$ZX\omega_3Y\colon y \cdot YQ + x \cdot (t + YQ) = t \cdot ZB \Rightarrow (x+y)YQ + xt = t \cdot ZB.$$

Откуда

$$PX + YQ + t = \frac{2t \cdot ZB}{x+y} \Rightarrow AC = \frac{2t \cdot ZB}{x+y}.$$

Критерии.

ZT — радикальная ось ω_1 и ω_3 — 2 балла.

Середина AC лежит на радикальной оси ω_1 и ω_3 — 1 балл.

Длина ZB равна длине отрезка касательной из Z к ω_1 и ω_3 — 2 балла.

Вычисление AC и завершение доказательства — 3 балла.

5. Сфера S касается плоскости. Пусть A, B, C, D — четыре точки этой плоскости такие, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Рассмотрим точку A' такую, что S касается граней тетраэдра $A'BCD$. Точки B', C', D' определяются аналогично. Докажите, что точки A', B', C', D' лежат в одной плоскости и плоскость $A'B'C'D'$ касается S.

(Алексей Заславский)

Решение. Пусть S касается плоскости в точке P. Пусть D' — точка пересечения плоскостей, проходящих через AB, BC, CA и касающихся S (аналогично определим точки A', B', C'). Предположим, что плоскость, проходящая через X и Y и касающаяся S, касается ее в точке P_{xy}. Точки P, P_{ab}, P_{ac}, P_{ad} лежат на одной окружности W_a, потому что прямые AP, AP_{ab}, AP_{ac}, AP_{ad} касаются S. Аналогично найдем оставшиеся тройки точек, лежащих на одной окружности с P, назовем соответствующие окружности W_b, W_c, W_d. Выполнив инверсию с центром в точке P и произвольным радиусом, получим четыре прямые с тремя точками на каждой прямой. Рассмотрев точку пересечения четырех окружностей — точку Микеля — заключаем, что окружности, описанные вокруг треугольников $P_{ab}P_{bc}P_{ca}$, $P_{ab}P_{bd}P_{da}$, $P_{ac}P_{cd}P_{da}$, $P_{bc}P_{cd}P_{db}$ (назовем их W'_d, W'_c, W'_b, W'_a), пересекается на S в точке P'. W'_d — это ГМТ точек касания касательных, проведённых из точки D' к S, поэтому $D'P'$ касается S и D' лежит в касательной плоскости, проведённой из точки P' к S. Аналогично заключаем, что A', B', C' также принадлежат плоскости, касающейся S в точке P'. Поэтому A', B', C', D' лежат в одной плоскости и эта плоскость касается S.

Критерии.

Введены точки типа P_{ab} и окружностей типа W_a — 2 балла.

Инверсия с центром P — 2 балла.

Рассмотрена точка Микеля — 2 балла.

Завершение доказательства — 2 балла.