

Применим инверсию

Использование инверсии существенно облегчает решение ряда геометрических задач, связанных с окружностями, и не только.

В частности, в неявном виде мы уже использовали инверсию при доказательстве **неравенства Птолемея**.

Вспомним это доказательство, приведя его к более естественному виду.

Пример 1. Докажите, что в любом четырехугольнике $ABCD$ $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geq AC \cdot BD$.

Решение. Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром A радиуса R . Образами точек B , C и D будут точки B' , C' и D' , лежащие на лучах AB , AC и AD соответственно причем $AB' \cdot AB = AC' \cdot AC = AD' \cdot AD$

$= R^2$ (см. рис. 1). Тогда $\frac{AB'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$, то есть

$$B'C' = R^2 \cdot \frac{BC}{AB \cdot AC}. \text{ Аналогично, } C'D' = R^2 \cdot \frac{CD}{AC \cdot AD}$$

$$\text{и } B'D' = R^2 \cdot \frac{BD}{AB \cdot AD}.$$

По неравенству треугольника $B'C' + C'D' \geq B'D'$. Подставив полученные выражения в это неравенство и освободившись от знаменателя, получим требуемое.

Инверсия помогает и при решении некоторых сложных задач на построение, так как мы умеем строить образы точек при заданной инверсии.

Пример 2. Постройте окружность, проходящую через две заданные точки A и B , и касающуюся данной окружности ω .

Решение. Заметим, что если обе точки A и B лежат на окружности ω , то задача решений не имеет. Пусть, например, $A \notin \omega$.

Предположим, что искомая окружность α построена (см. рис. 2). При инверсии с центром A точка B перейдет в некоторую точку B' , а окружность α – в прямую a , содержащую B' . Так как окружность α касается ω , то прямая a касается ее образа ω' .

Отсюда следует построение:

- 1) Сделаем инверсию относительно произвольной окружности β с центром A . Тогда образами точки B и окружности ω будут точка B' и окружность ω' соответственно.
- 2) Проведем касательную a к окружности ω' через точку B' .
- 3) Сделаем ту же инверсию еще раз, тогда a перейдет в α .

Замечания. 1) Описанное построение не зависит от того, как расположена точка A по отношению к ω (внутри или снаружи). Более того, построение не изменится, если вместо окружности ω будет задана прямая, поэтому сделанный чертеж не обязателен (он носит вспомогательный характер). 2) Количество решений зависит только от расположения точки B' : если она попадет внутрь ω' , то решений нет; если она попадет на ω' – то одно решение, а если вне ее – то два. 3) Обратите внимание на этот прием: двукратное применение одной и той же инверсии. Он часто приводит к успеху, так как инверсия является **инволюцией** (то есть, преобразование, ей обратное, – она сама).

Инверсия также часто используется в задачах, связанных с поиском ГМТ.

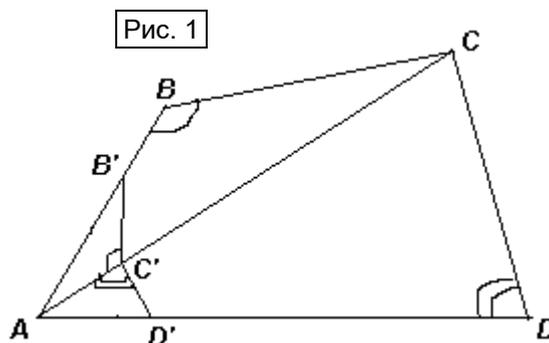


Рис. 1

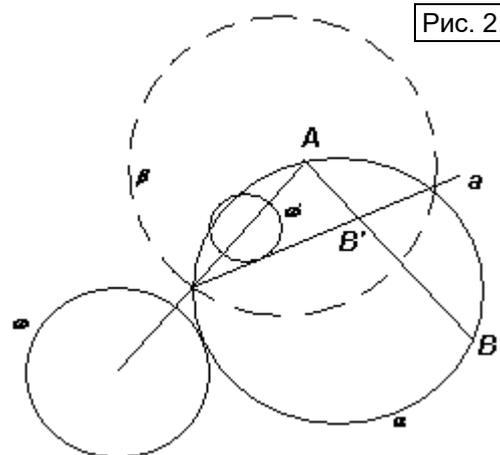


Рис. 2

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

1. Дан равнобедренный треугольник ABC . Найдите образ его основания BC при инверсии относительно окружности с центром A и радиусом AB .
2. Постройте окружность, проходящую через заданную точку A и касающуюся двух данных окружностей α и β .
3. *Задача Аполлония.* Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей (*рассмотрите любой из случаев расположения данных окружностей*).
4. Постройте окружность, проходящую через заданную точку A и ортогональную к двум данным окружностям.
5. В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей (см. рисунок). Найдите множество M их точек касания.
6. Дана окружность ω и точка P внутри нее, отличная от центра. Рассматриваются пары окружностей, касающиеся данной изнутри и друг друга в точке P . Найдите геометрическое место точек пересечения общих внешних касательных к этим окружностям.
7. Никакие три из четырех точек A, B, C и D не лежат на одной прямой. Докажите, что угол между описанными окружностями треугольников ABC и ABD равен углу между описанными окружностями треугольников ACD и BCD .
8. Даны две непересекающиеся окружности (одна лежит вне другой). Постройте окружность инверсии, при которой одна из них переходит в другую. (*Такая окружность называется их срединной окружностью.*)
9. Ортоцентр H треугольника ABC лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами A, B и C , проходящие через точку H , имеют общую касательную.

