

Инверсия

- Определения.** 1) Точки A и A' (отличные от O) называются симметричными относительно окружности ω , если A' лежит на луче OA и $OA \cdot OA' = R^2$.
- 2) Инверсией плоскости относительно окружности ω называется отображение плоскости на себя, которое переводит любую точку, кроме центра O окружности ω , в точку, симметричную ей относительно этой окружности.
- 3) Углом между пересекающимися окружностями называется угол между касательными к ним, проведенными в точке их пересечения.

Докажите основную лемму:

1. Пусть A и A' , B и B' – две пары точек, симметричных относительно окружности ω с центром O . Тогда $\angle OAB = \angle OB'A'$.

Докажите свойства инверсии:

2. а) Прямая, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, проходящую через центр инверсии (рассмотрите все случаи взаимного расположения прямой и окружности).
 б) Эта прямая является радикальной осью своего образа и окружности инверсии.
 в) Окружность, проходящая через центр инверсии, переходит в прямую, не проходящую через центр.
3. Окружность, не проходящая через центр инверсии, переходит в окружность, не проходящую через центр инверсии (рассмотрите все случаи взаимного расположения двух окружностей).
4. Инверсия сохраняет углы: а) между прямыми; б) между пересекающимися окружностями; в) между пересекающимися прямой и окружностью.

Преобразования, сохраняющие углы, называются конформными.

Используя определения и доказанные свойства:

5. Найдите все а) прямые; б) окружности являющиеся неподвижными при инверсии.
6. Докажите, что любая неподвижная окружность ортогональна окружности инверсии.
7. Докажите, что если окружность α переходит в себя при инверсии относительно ω , то окружность ω переходит в себя при инверсии относительно α .
8. Пусть точки A и A' симметричны относительно окружности ω . Докажите, что любая окружность α , проходящая через эти точки, ортогональна к окружности ω .