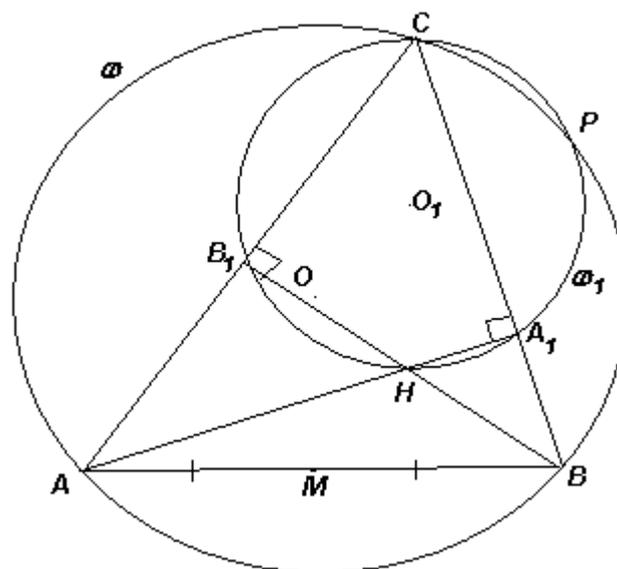


Ортоцентр, середина стороны, точка пересечения касательных и ... еще одна точка!

По одноименной статье Ю. Блинкова,
журнал «Квант», №1/2014
(<http://geometry.ru/articles/p-point.pdf>).

Все задачи этого занятия связаны со следующей геометрической конструкцией.

Пусть AA_1 и BB_1 – высоты остроугольного неравностороннего треугольника ABC , H – его ортоцентр, M – середина AB . Окружности ω с центром O и ω_1 с центром O_1 , описанные около треугольников ABC и A_1B_1C соответственно, вторично пересекаются в точке P (см. рисунок).



Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- Докажите, что точки M , H и P лежат на одной прямой.
- Докажите, что:
 - окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 , проходят через точку P ;
 - PM – биссектриса углов APA_1 и BPB_1 ;
 - прямая PA проходит через точку, симметричную точке A_1 относительно прямой CH .
- Пусть L_1 и L_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника AMA_1 , с прямыми BC и AC соответственно, а K_1 и K_2 – вторые точки пересечения окружности, описанной около треугольника BMB_1 , с прямыми AC и BC соответственно. Докажите, что:
 - L_1 , K_1 , M и O лежат на одной прямой;
 - L_2 , K_2 , M и O_1 лежат на одной прямой;
 - L_1 , K_1 , L_2 и K_2 лежат на одной окружности;
 - прямые L_1L_2 , K_1K_2 и PM пересекаются в одной точке.
- Пусть прямые A_1B_1 и AB пересекаются в точке S , R – середина отрезка CM . Докажите, что:
 - точки C , P и S лежат на одной прямой;
 - прямые SH и CM перпендикулярны;
 - прямые OR и SC перпендикулярны.
- Пусть касательные к окружности ω , проведенные в точках A и B , пересекают прямую A_1B_1 в точках X и Y соответственно и пересекаются в точке Z . Докажите, что:
 - точка M – центр вписанной окружности треугольника XYZ ;
 - окружности, описанные около треугольников AMA_1 и BMB_1 , проходят через точки X и Y соответственно;
 - прямые MH , A_1B_1 и ZC_1 пересекаются в одной точке (C_1 – точка пересечения CH и AB).
 - прямая ZP проходит через точку H_c , симметричную H относительно стороны AB .
 - описанные окружности треугольников ABC и XYZ касаются в точке P .
 - прямые AP , BC и ZC_1 пересекаются в одной точке.