

### Геометрические тождества и неравенства

На занятии по теме «Формула Карно» вы увидели, что геометрическое тождество позволяет доказать ряд геометрических неравенств. На сегодняшнем занятии мы обратим внимание еще на несколько геометрических тождеств, с помощью которых можно доказать неравенства, причем, доказав одно из неравенств, можно получать из него другое, и так далее.

Одно из тождеств мы рассмотрим вначале занятия, и на него будет опираться первая половина неравенств, которые будут предложены для самостоятельного решения, а еще два вы докажете сами в процессе решения задач и их можно будет использовать для второй половины.

**Пример 1.** Докажите, что в любом треугольнике  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$ .

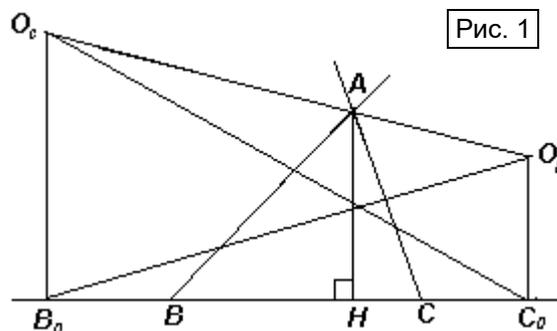
**Доказательство.**  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow \frac{2S}{h_a} = \frac{S}{r_b} + \frac{S}{r_c} \Leftrightarrow a = p - b + p - c \Leftrightarrow 2p = a + b + c$ .

Каковы а) алгебраическая; б) геометрическая интерпретации доказанного равенства?

[а)  $\frac{2}{h_a} = \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} \Leftrightarrow h_a = \frac{2r_b r_c}{r_b + r_c}$ , то есть,

высота треугольника, проведенная к одной из сторон, является средним гармоническим радиусов вневписанных окружностей, касающихся двух других сторон треугольника;

б) пусть в треугольнике  $ABC$ :  $O_b$  и  $O_c$  – центры вневписанных окружностей, касающихся сторон  $AC$  и  $AB$  соответственно,  $B_0$  и  $C_0$  – точки касания этих окружностей с прямой  $BC$ . Тогда прямые  $O_b B_0$  и  $O_c C_0$  пересекаются на середине высоты  $AH$  этого треугольника (см. рис. 1)]



Доказанное соотношение позволяет доказать ряд неравенств (см. задачи 1 – 4 для самостоятельного решения). Не забудьте, что помимо геометрических соображений, можно и нужно использовать алгебру.

### Упражнения и задачи для самостоятельного решения

Во всех задачах:  $a, b, c$  – стороны треугольника,  $h_a, h_b, h_c$  – соответствующие им высоты,  $p$  и  $S$  – его полупериметр и площадь,  $R, r, r_a, r_b, r_c$  – радиусы описанной, вписанной и вневписанных окружностей соответственно.

1. Докажите, что: а)  $h_a \leq \sqrt{r_b r_c}$ ; б)  $r_a + r_b + r_c \geq h_a + h_b + h_c$ . В каких случаях достигаются равенства?

2. Докажите, что  $\frac{1}{b+c-a} + \frac{1}{a+c-b} + \frac{1}{a+b-c} \geq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ . В каких случаях достигается равенство?

3. Докажите, что  $\frac{1}{r} < \frac{2}{h_a} + \frac{2}{h_b} < \frac{2}{r}$ .

4. Докажите, что  $\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geq 3$ . В каких случаях достигается равенство?

5. Докажите, что  $OH^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$ , где  $O$  и  $H$  – центр описанной окружности и ортоцентр треугольника соответственно.

6. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  построен равносторонний треугольник  $ABD$  (точки  $C$  и  $D$  – в одной полуплоскости относительно прямой  $AB$ ). Докажите, что

$$CD^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2} - 2S\sqrt{3}.$$

7. Докажите, что а)  $4S\sqrt{3} \leq a^2 + b^2 + c^2 \leq 9R^2$ ; б)  $a + b + c \leq 3R\sqrt{3}$ . В каких случаях достигаются равенства?

8. Докажите, что для любого треугольника  $ABC$  выполняются неравенства:

а)  $abc \leq 3R^3\sqrt{3}$ ; б)  $\sin\angle A \cdot \sin\angle B \cdot \sin\angle C \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$ . В каких случаях достигаются равенства?

9. Докажите, что  $3r^2\sqrt{3} \leq S \leq \frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$ . В каких случаях достигаются равенства?

10. Докажите, что: а)  $a^2 + b^2 + c^2 - (a-b)^2 - (b-c)^2 - (c-a)^2 \geq 4S\sqrt{3}$ ; б)  $5R - r \geq p\sqrt{3}$ ;

в)  $4R - r_a \geq (p-a) \left( \sqrt{3} + \frac{a^2 + (b-c)^2}{2S} \right)$ .