

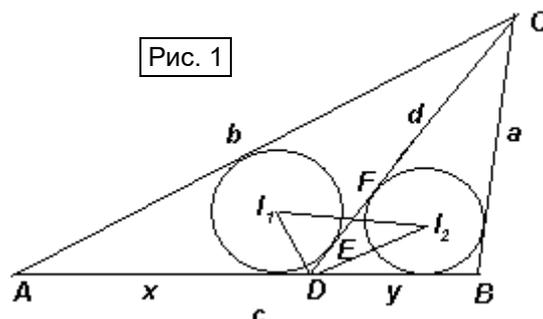
Три вписанные окружности в треугольнике

Использован материал статьи А. Блинков, Ю. Блинков. Две окружности в треугольнике, три окружности в треугольнике ... , «Квант», №2/2012.

Продолжим рассматривать геометрическую конфигурацию, которая получается, если чевианой разбить треугольник на два треугольника и вписать в эти треугольники окружности (см. рис. 1). На прошлом занятии мы выяснили ряд свойств этой конфигурации, в частности, научились находить расстояния между точками касания окружностей с отрезком CD , а также решили еще ряд задач.

Сегодня вам будет предложена цепочка задач, в которой к этим двум окружностям добавится третья – окружность, вписанная в треугольник ABC .

Начиная с задачи 3, рекомендуется решать по порядку номеров!



Упражнения и задачи для самостоятельного решения.

Во всех задачах, кроме 5 и 6. На стороне AB треугольника ABC отмечена точка D . Пусть I , I_1 и I_2 – центры окружностей, вписанных в треугольники ABC , ACD и BCD соответственно, r , r_1 и r_2 – их радиусы, а L , M и K – точки касания этих окружностей со стороной AB .

- Пусть $CD \perp AB$ и $\angle ACB = 90^\circ$. Докажите, что: а) $r_1 + r_2 + r = CD$; б) $I_1 I_2 = r\sqrt{2}$.
- Докажите, что $r_1 + r_2 > r$.
- Докажите, что: а) $ML = DK$; б) окружности с центрами I_1 и I_2 касаются тогда и только тогда, когда точки D и L совпадают.
- Докажите, что точки I_1 , L , D и I_2 лежат на одной окружности.
- В трапеции $ABCD$ биссектрисы углов A и D пересекаются в точке E , лежащей на боковой стороне BC . Эти биссектрисы разбивают трапецию на три треугольника, в каждый из которых вписана окружность. Одна из этих окружностей касается основания AB в точке K , а две другие касаются биссектрисы DE в точках M и N . Докажите, что $BK = MN$.
- Зафиксированы две окружности ω_1 и ω_2 , одна их внешняя касательная n и одна их внутренняя касательная m . На прямой m выбирается точка X , а на прямой n строятся точки Y и Z так, что XY и XZ касаются ω_1 и ω_2 соответственно, а треугольник XYZ содержит окружности ω_1 и ω_2 . Докажите, что центры окружностей, вписанных в треугольники XYZ , лежат на одной прямой.
- Пусть $CD \perp AB$. Докажите, что: а) $I_1 L = I_2 L$; б) вершина P квадрата $I_1 L I_2 P$ лежит на прямой CD .
- Пусть $CD \perp AB$ и $\angle ACB = 90^\circ$. Докажите, что: а) точка P – центр окружности, описанной около треугольника $I_1 C I_2$; б) $I_1 L \perp AC$ и $I_2 L \perp BC$; в) $I_1 L = I_2 L$; г) точки A , I_1 , I_2 и B лежат на одной окружности.
- Пусть $CD \perp AB$. Докажите, что: а) $\angle ACB = 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $r^2 = r_1^2 + r_2^2$; б) $\angle ACB > 90^\circ$ тогда и только тогда, когда $r^2 < r_1^2 + r_2^2$.