

## Непрерывность в геометрии

На этом занятии мы рассмотрим задачи, решение которых опирается на понятие **непрерывности**. Такие задачи находятся на стыке комбинаторной и классической геометрии, а идеи, которые будут использованы при решении задач, привнесены из алгебры и математического анализа.

Сформулируем базисные сведения, которые нам понадобятся, и проиллюстрируем их на «картинках»:

1) **Определение.** Функция непрерывна, если при малых изменениях значения аргумента мало изменяется и значение функции.

2) **Теорема о промежуточном значении.** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке и принимает на его концах значения разных знаков, то внутри отрезка существует точка, в которой она принимает значение ноль.

3) **Обобщение этой теоремы.** Если функции  $f$  и  $g$  непрерывны на отрезке  $[a; b]$  и на этом отрезке существуют такие две точки, что в одной  $f > g$ , а в другой  $f < g$ , то на этом отрезке найдется и точка, в которой  $f = g$ .

**Следствие.** Если функция  $f$  непрерывна на отрезке  $[a; b]$ , то она принимает все значения между  $f(a)$  и  $f(b)$ .

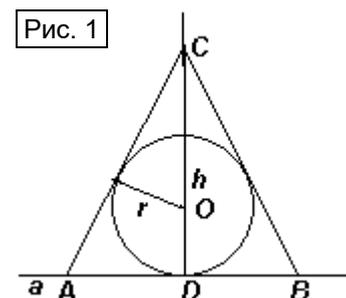
*Строго это формулируется и обосновывается в курсе математического анализа, но для наших целей пока достаточно наглядных представлений.*

Рассмотрим примеры.

**Пример 1.** Радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник, равен 1. Может ли площадь треугольника быть равна 6?

**Ответ:** может.

**Решение.** Рассмотрим окружность с центром  $O$  радиуса 1, прямую  $a$ , которая касается окружности в некоторой точке  $D$ , и прямую  $DO$  (см. рис. 1). Так как  $DO \perp a$ , то выбрав какое-то положение точки  $C$  на луче  $DO$  (вне окружности) и проведя через эту точку касательные к окружности, пересекающие прямую  $a$  в точках  $A$  и  $B$ , мы получим равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ , в который эта окружность вписана.



Зафиксируем рассмотренную окружность, прямую  $a$  и точку  $D$ , и будем «двигать» вершину  $C$  по лучу  $CO$ , изменяя расстояние  $h$  от  $C$  до  $AB$  так, чтобы данная окружность оставалась вписанной в равнобедренный треугольник  $ABC$ . Вершины  $A$  и  $B$  в этом случае будут смещаться вдоль прямой  $AB$  (в противоположных направлениях). При малых изменениях  $h$  мало изменяется периметр треугольника, а так как  $S_{\triangle ABC} = pr$  (где  $p$  – полупериметр  $ABC$ ), то мало изменяется и его площадь. Таким образом, зависимость  $S(h)$  **является непрерывной функцией**.

Выберем значение  $h$  так, чтобы треугольник  $ABC$  был равносторонним, тогда его сторона  $b = 2r \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 2\sqrt{3}$ , а площадь  $S = \frac{b^2 \sqrt{3}}{4} = 3\sqrt{3} < 6$ . Так как  $AB > 2$ , то, выбрав  $h =$

6, получим треугольник, у которого  $S > 6$ . По **теореме о промежуточном значении** найдется такое  $h$ , для которого  $S = 6$ , что и требовалось.

Таким образом, для решения задачи: 1) зафиксированы некоторые точки заданной конфигурации, выбрана независимая переменная  $h$  и показано, каким образом изменяется положение остальных точек в зависимости от  $h$ ; 2) объяснено, почему зависимость  $S(h)$  искомой величины от выбранной переменной является непрерывной функцией; 3) показано существование значений переменной, при которых искомая величина принимает значения как меньше, так и больше искомого; 4) использована теорема о промежуточном значении.

Отметим, что другие способы решения, связанные с поиском параметров искомого треугольника в явном виде, так или иначе приводят к кубическому уравнению, которое невозможно решить «школьными» методами.

Здесь же уместно привести еще одну задачу, связанную с рассмотренной конфигурацией. Для ее решения удобно использовать еще одно свойство непрерывных функций: **функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своего наименьшего и наибольшего значения.**

**Пример 2.** У двух равнобедренных треугольников соответственно равны боковые стороны и радиусы вписанных окружностей. Обязательно ли эти треугольники равны?

**Ответ:** нет, не обязательно.

Конечно можно в явном виде найти два неравных треугольника, удовлетворяющие условию, но это не очень просто.

**Решение.** Зафиксируем некоторую окружность радиуса  $r$  и будем рассматривать равнобедренные треугольники  $ABC$ , описанные около этой окружности (см. рис. 1). Такие треугольники однозначно определяются длиной  $h$  высоты, опущенной на основание  $AC$ .

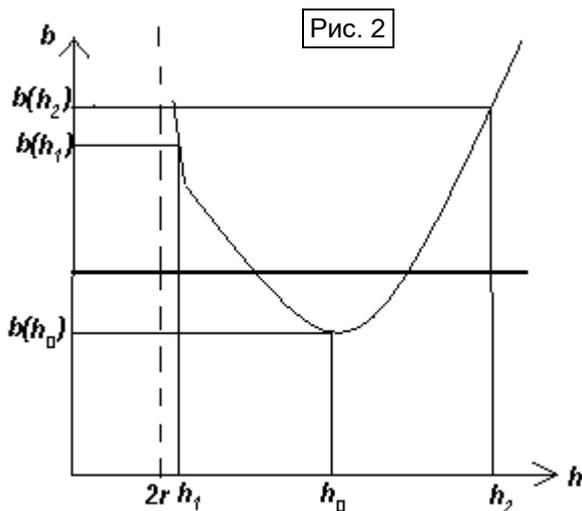
Величина  $h$  при этом может принимать любые значение из интервала  $(2r, +\infty)$ . Рассмотрим зависимость длины боковой стороны  $b$  от  $h$ . При малых изменениях  $h$  мало изменяется и значение  $b$ , поэтому  $b(h)$  является непрерывной функцией.

Если  $h$  стремится к границам выбранного интервала, то в обоих случаях  $b$  становится очень большим (стремится к «плюс бесконечности»).

Рассмотрим функцию  $b(h)$  на отрезке  $[h_1; h_2]$ , где  $h_1$  чуть больше, чем  $2r$ , а  $h_2$  достаточно велико. Тогда значение функции  $b(h)$  на концах отрезка будет достаточно большим. На этом отрезке функция достигает своих экстремальных значений, причем наибольшее достигается на одном из концов, а наименьшее – в какой-то внутренней точке  $h_0$  (см. рис. 2).

Рассмотрим теперь какое-нибудь фиксированное значение функции, которое немного больше, чем  $b(h_0)$ . Оно достигается, по крайней мере, при двух различных значениях  $h$ .

Следовательно, найдутся хотя бы два неравных равнобедренных треугольника с равными боковыми сторонами и равными радиусами вписанных окружностей.



### Задачи для самостоятельного решения

- Докажите, что в круге с центром  $O$  можно провести хорду  $AB$  так, что площадь треугольника  $AOB$  равна площади сегмента, отсекаемого этой хордой.
- Можно ли в окружность радиуса 1 вписать треугольник периметра 5?
- а) Докажите, что любой треугольник можно разбить на два треугольника так, чтобы окружности, вписанные в получившиеся треугольники, были равны. б) Останется ли утверждение верным, если вписанные окружности заменить на описанные?
- Существует ли выпуклый четырехугольник и точка  $P$  внутри него такие, что сумма расстояний от  $P$  до вершин равна периметру четырехугольника?
- Периметр выпуклого четырехугольника равен 2004, одна из его диагоналей равна 1001. Может ли вторая диагональ быть равна: а) 1001; б) 2?
- Существует ли неравносторонний треугольник, в котором наименьшая медиана равна наибольшей высоте?
- Существует ли неравнобедренный треугольник, у которого медиана, проведенная из одной вершины, биссектриса, проведенная из другой, и высота, проведенная из третьей, равны?

8. а) Дан шарнирный четырехугольник (длины его сторон и их порядок – зафиксирован, а углы могут меняться). Докажите, что существует такое положение этого четырехугольника, при котором он вписан в окружность.
- б) Докажите, что среди всех шарнирных многоугольников с фиксированными сторонами (и порядком сторон), вписанный многоугольник имеет наибольшую площадь.
9. Через точку  $O$  пересечения диагоналей четырехугольника  $ABCD$  проведена произвольная прямая, пересекающая стороны  $AD$  и  $BC$  в точках  $K$  и  $M$  соответственно. Докажите, что длина отрезка  $MK$  не превосходит наибольшей из диагоналей четырехугольника.