

### Равносторонний треугольник и две окружности

Основу этого занятия составляет цепочка задач, связанная с одной и той же геометрической конфигурацией.

Через вершину  $B$  равностороннего треугольника  $ABC$  проведена прямая  $l$ , не пересекающая сторону  $AC$ . Вне треугольника проведены две окружности с центрами  $P$  и  $Q$ : одна из них касается стороны  $BC$ , прямых  $l$  и  $AC$ , а другая касается стороны  $BA$ , прямых  $l$  и  $AC$  (см. рис. 1).

Основной факт, который можно будет использовать при решении задач: **треугольник  $PBQ$  – равнобедренный**. Докажем это.

**Доказательство.** Проведем луч  $BN$ , симметричный лучу  $BP$  относительно прямой  $AB$ , тогда  $\angle NBA = \angle DBA$  (точка  $N$  лежит на отрезке  $AC$ ). Так как  $AP$  – биссектриса внешнего угла треугольника  $ABC$ , который равен  $120^\circ$ , то  $\angle BAP = 60^\circ = \angle BAN$ . Значит, треугольники  $BAP$  и  $BAN$  равны (по стороне и прилежащим углам), поэтому  $BP = BN$ .

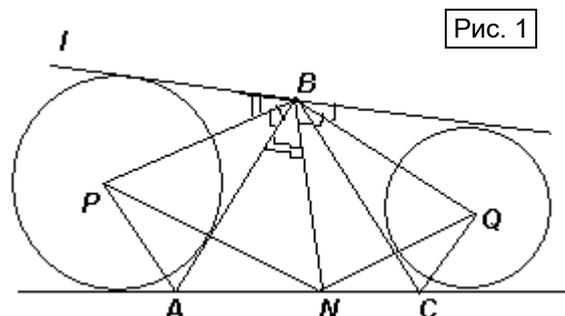


Рис. 1

Заметим теперь, что сумма углов, образованных прямой  $l$  со сторонами  $AB$  и  $BC$  (вне данного треугольника) равна  $120^\circ$ , значит, сумма их половин равна  $60^\circ$ . Следовательно,  $\angle NBC = \angle QBC$ . Тогда, рассуждая аналогично вышеизложенному, получим равенство треугольников  $BCN$  и  $BCQ$ , откуда  $BQ = BN$ . Таким образом,  $BP = BQ$ , то есть треугольник  $BPQ$  – равнобедренный.

*В итоге, точка  $Q$  является образом точки  $P$  при повороте на  $120^\circ$ , а в процессе решения этот поворот представлен в виде композиции двух осевых симметрий.*

*Другие свойства этой конфигурации вы получите в процессе самостоятельного решения задач. Рекомендуется их решать примерно в той последовательности, которая предложена.*

*Советую также обратить внимание на еще одну симметрию: прямые  $l$  и  $AC$  симметричны относительно прямой  $PQ$  – линии центров данных окружностей.*

К рассмотренной конфигурации относятся первые 8 задач. Те из вас, кто с ними справятся, могут решить еще три задачи, также связанные с равносторонним треугольником и окружностями.

### Задачи для самостоятельного решения

Через вершину  $B$  равностороннего треугольника  $ABC$  проведена прямая  $l$ , не пересекающая сторону  $AC$ . Вне треугольника проведены две окружности: окружность с центром  $P$  касается стороны  $BA$  в точке  $A_1$ , а также прямых  $l$  и  $AC$ , а окружность с центром  $Q$  касается стороны  $BC$  в точке  $C_1$ , а также прямых  $l$  и  $AC$ . Докажите, что:

- 1) Прямые  $PA_1$ ,  $QC_1$  и  $AC$  пересекаются в одной точке.
- 2) Описанная окружность треугольника  $A_1BC_1$  проходит через середину стороны  $AC$ .
- 3) Центр окружности, описанной около треугольника  $PBQ$ , лежит на стороне  $AC$ .
- 4) Пусть  $N$  – точка пересечения прямых  $PA_1$  и  $QC_1$ ,  $O$  – центр окружности, описанной около треугольника  $PBQ$ . Тогда точки  $P$ ,  $Q$ ,  $N$  и  $O$  лежат на одной окружности.
- 5) Ортоцентр треугольника  $A_1BC_1$  лежит на прямой  $PQ$ .
- 6) Пусть прямая  $PQ$  пересекает  $AB$  и  $BC$  в точках  $A'$  и  $C'$  соответственно. Тогда центр окружности, описанной около треугольника  $A'BC'$ , лежит на отрезке  $BN$ .
- 7) Пусть описанная окружность треугольника  $PBQ$  пересекает прямую  $l$  в точке  $T$ . Тогда точка  $T$  лежит на окружности, описанной около треугольника  $A'BC'$ .
- 8) а) Докажите, что высота треугольника  $ABC$  равна сумме радиусов данных окружностей.  
б) Обобщите этот результат для случая, когда треугольник  $ABC$  – равнобедренный ( $AB = BC$ ).

---

**9.** На дуге  $BC$  окружности, описанной около равностороннего треугольника  $ABC$ , отмечена точка  $P$ . Отрезки  $AP$  и  $BC$  пересекаются в точке  $Q$ . Докажите, что

$$\frac{1}{PQ} = \frac{1}{PB} + \frac{1}{PC}.$$

**10.** Дан равносторонний треугольник  $ABC$  с центром  $O$ . Прямая, проходящая через вершину  $C$ , пересекает описанную окружность треугольника  $AOB$  в точках  $D$  и  $E$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $O$  и середины отрезков  $BD$  и  $BE$  лежат на одной окружности.

**11.** Найдите геометрическое место центров правильных треугольников, стороны которых проходят через три заданные точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  (на каждой стороне или ее продолжении лежит ровно одна из заданных точек).