

Разностные треугольники

Определение. Треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, называется **разностным**.

Такие треугольники обладают рядом интересных свойств, которые мы и рассмотрим.

Пусть в треугольнике ABC : $b = \frac{a+c}{2}$ ($a \leq b \leq c$), I – центр вписанной окружности, W – точка пересечения луча BI и окружности, описанной около треугольника ABC (см. рис. 1). Тогда: 1)

$$BI = IW; \quad 2) \quad r = \frac{1}{3} h_b.$$

Доказательство. 1) Опустим из точки I перпендикуляр IN на сторону BC , а из точки W – перпендикуляр WK на сторону AC . Так как N – точка касания стороны треугольника и вписанной окружности, то $BN = p - b = \frac{1}{2}b = AK$. Кроме того, $\angle CBW = \angle CAW$. Тогда $\triangle BIN = \triangle AWK$ (по катету и острому углу), следовательно, $BI = AW$. По теореме «трилистника» $WA = WI$, то есть $BI = IW$; что и требовалось.

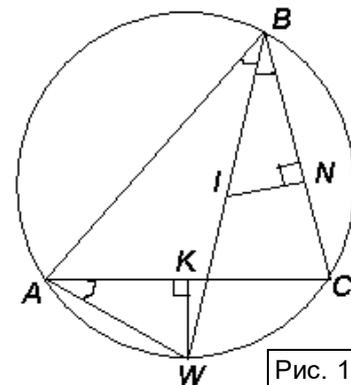


Рис. 1

$$2) \quad r = \frac{S}{p} = \frac{bh_b}{a+b+c} = \frac{bh_b}{3b} = \frac{1}{3} h_b$$

Являются ли доказанные утверждения признаками **разностного** треугольника?

Да; 1) равенство прямоугольных треугольников по гипотенузе и острому углу;

$$2) \quad b = \frac{2S}{h_b} = \frac{(a+b+c)r}{h_b} = \frac{a+b+c}{3} \Leftrightarrow b = \frac{a+c}{2}$$

Упражнения и задачи для самостоятельного решения

- Докажите, что треугольник ABC является разностным тогда и только тогда, когда:
 - прямая IM , где M – центроид (точка пересечения медиан) треугольника, параллельна стороне AC ;
 - сторона AC пересекает отрезок IW в его середине;
 - середина стороны AC и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно точки касания этой же стороны и вписанной окружности;
 - высота треугольника равна радиусу вневписанной окружности, касающейся той стороны, к которой проведена высота;
 - точка касания вневписанной окружности со стороной треугольника и основание высоты, проведенной к этой стороне, симметричны относительно основания биссектрисы, проведенной к этой же стороне.
- Среди прямоугольных треугольников укажите все, являющиеся разностными, и докажите, что разностью арифметической прогрессии (a ; b ; c) является радиус r вписанной в этот треугольник окружности.
- Докажите, что в разностном треугольнике ABC : а) вершина B , центры O и I описанной и вписанной окружностей и середины сторон AB и BC лежат на одной окружности; б) прямая IM , где M – центроид треугольника, является касательной к этой окружности.
- В египетском треугольнике ABC (угол C – прямой, BC – меньший катет) найдите угол BOI (точки O и I – центры описанной и вписанной окружностей соответственно).
- Стороны треугольника равны 5, 6 и 7. Найдите расстояние от центроида до центра вписанной окружности.

6. Докажите, что в разностном треугольнике ABC центр I вписанной окружности является центром окружности, описанной около треугольника $A'LC'$, где L – основание биссектрисы, проведенной из вершины B , A' и C' – середины сторон BC и AB соответственно.

7. В разностном треугольнике ABC продолжение биссектрисы BL пересекает описанную окружность в точке W , T – основание перпендикуляра, опущенного из точки W на сторону AB .

Докажите, что: а) $BT = AC$; б) $AL = \frac{1}{2} AB$.

8. Докажите, что треугольник ABC является разностным тогда и только тогда, когда:

а) сумма расстояний от произвольной точки его биссектрисы, проведенной к средней стороне, до всех сторон равна одной из высот; б) он не является равнобедренным и центр его вписанной окружности равноудален от середин двух сторон.

9. Докажите, что стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию тогда и только тогда, когда котангенсы его половинных углов составляют арифметическую прогрессию.

10. Докажите, что в разностном треугольнике средний по величине угол не больше, чем 60° .