Серия 6. Степень точки и радикальные оси.

1. Даны две неконцетрические окружности ω_1 и ω_2. Докажите, что ГМТ точек X таких, что степени точки X относительно окружностей ω_1 и ω_2 равны, — это прямая, перпендикулярная линии центров окружностей.

2. Даны три попарно неконцентрические окружности. Докажите, что их попарные радикальные оси пересекаются в одной точке или параллельны.

3. К двух непересекающимся кругам провели 4 общих касательных. Докажите, что все 4 середины отрезков касательных лежат на одной прямой.

4. На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC отмечены по две точки. Оказалось, что любые 4 точки, лежащие на двух сторонах треугольника, лежат на одной окружности. Докажите, что все шесть точек лежат на одной окружности.

5. Прямые AB, AC — касательные к окружности ω. Точки M, N — середины отрезков AB и AC. Точка P — произвольная точка на прямой MN. Докажите, что $PA = PD$, где PD — касательная из точки P к окружности ω.

6. Точка M является точкой пересечения медиан треугольника ABC. Оказалось, что прямая AB касается описанной окружности треугольника AMC. Докажите, что она также касатеся описанной окружности треугольника BMC.

7. Пусть B_1, C_1 - точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами AC и AB. На продолжениях сторон AB, AC за точки B и C отметили точки X, Y соответственно, так, что $C_1X = B_1Y = BC$. Докажите, что середины отрезков C_1X, B_1Y, BC лежат на одной прямой.

8. Пусть AA_1, BB_1, CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC, а точка P внутри треугольника не лежит на них. Лучи AP, BP, CP вторично пересекают описанную окружность в точках A_2, B_2, C_2 соответственно. Докажите, что дуги окружностей AA_1A_2, BB_1B_2 и CC_1C_2 пересекаются в одной точке.