Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс.

Серия 3. Разнобой. Группа 9-2.

1. В шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны, можно вписать окружность. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника равны.

2. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

3. Середины сторон выпуклого шестиугольника образуют шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны. Докажите, что большие диагонали исходного шестиугольника пересекаются в одной точке.

4. В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d?

5. На столе лежит кучка из N спичек. Двое по очереди берут из неё любое число спичек, являющееся полным квадратом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N, для которых у второго игрока есть выигрышная стратегия.

6. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 2$, $a_n = 2^{a_{n-1}} + 2$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что a_n делится на a_{n-1} при всех $n \geqslant 2$.

Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс.

Серия 3. Разнобой. Группа 9-2.

1. В шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны, можно вписать окружность. Докажите, что противоположные стороны шестиугольника равны.

2. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

3. Середины сторон выпуклого шестиугольника образуют шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны. Докажите, что большие диагонали исходного шестиугольника пересекаются в одной точке.

4. В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d?

5. На столе лежит кучка из N спичек. Двое по очереди берут из неё любое число спичек, являющееся полным квадратом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N, для которых у второго игрока есть выигрышная стратегия.

6. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 2$, $a_n = 2^{a_{n-1}} + 2$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что a_n делится на a_{n-1} при всех $n \geqslant 2$.