

Серия 1. Индукция

1. При каких $n > 3$ набор гирь с массами $1, 2, 3, \dots, n$ граммов можно разложить на три равные по массе кучки?
2. Петя умеет на любом отрезке отмечать точки, которые делят этот отрезок пополам или в отношении $n : (n + 1)$, где n – любое натуральное число. Петя утверждает, что этого достаточно, чтобы на любом отрезке отметить точку, которая делит его в любом заданном рациональном отношении. Прав ли он?
3. Докажите, что для любого k и любого нечётного m найдётся такое n , что $n^n - m$ делится на 2^k .
4. Колода перфокарт k различных цветов разложена в один ряд. Если две перфокарты одного цвета лежат рядом или через одну, то можно выбрасывать ту из них, которая левее. Кроме того, можно подкладывать справа любое количество перфокарт из других колод. Доказать, что можно подкладывать и выбрасывать перфокарты таким образом, чтобы в конце концов их осталось только k .
5. В классе каждый болтун дружит хотя бы с одним молчуном. При этом болтун молчит, если в кабинете находится нечетное число его друзей – молчунов. Докажите, что учитель может пригласить на факультатив не менее половины класса так, чтобы все болтуны молчали.
6. В графе $2n$ вершин и проведено $n^2 + 1$ рёбер. Докажите, что в графе есть
 - а) хотя бы один треугольник;
 - б) не менее n треугольников.
7. На химической конференции присутствовало k учёных химиков и алхимиков, причём химиков было больше, чем алхимиков. Известно, что на любой вопрос химики всегда отвечают правду, а алхимики иногда говорят правду, а иногда лгут. Оказавшийся на конференции математик про каждого учёного хочет установить, химик тот или алхимик. Для этого он любому учёному может задать вопрос: "Кем является такой-то: химиком или алхимиком?" (В частности, может спросить, кем является сам этот учёный.) Доказать, что математик может установить это за $[1, 5k - 1, 5]$ вопросов.
8. Команда, состоящая из $N(N + 1)$ футболистов разного роста, выстроена в ряд. Докажите, что тренер всегда сможет удалить из ряда $N(N - 1)$ футболистов так, чтобы среди оставшихся $2N$ футболистов были верны следующие утверждения:
 - (1) Никто не стоит между первым и вторым по росту
 - (2) Никто не стоит между третьим и четвёртым
 -
 - (N) Никто не стоит между предпоследним и последним по росту