Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс.

Серия 3. Разнобой. Группа 9-1.

1. Середины сторон выпуклого шестиугольника образуют шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны. Докажите, что большие диагонали исходного шестиугольника пересекаются в одной точке.

2. В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d?

3. На столе лежит кучка из N спичек. Двое по очереди берут из неё любое число спичек, являющееся полным квадратом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N, для которых у второго игрока есть выигрышная стратегия.

4. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 2$, $a_n = 2^{a_{n-1}} + 2$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что a_n делится на a_{n-1} при всех $n \geqslant 2$.

5. Найдите все пары натуральных x и y, для которых

$$[x-1, y-1] + [x+1, y+1] = 2[x, y].$$

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точки I_D, I_C, I_B, I_A — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ABD, ACD и BCD соответственно. Докажите, что $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.

Кружок в Хамовниках. 2017-2018 учебный год. 9 класс.

Серия 3. Разнобой. Группа 9-1.

1. Середины сторон выпуклого шестиугольника образуют шестиугольник, противоположные стороны которого параллельны. Докажите, что большие диагонали исходного шестиугольника пересекаются в одной точке.

2. В стране между некоторыми парами городов осуществляются двусторонние беспосадочные авиарейсы. Известно, что из любого города в любой другой можно долететь, совершив не более 100 перелетов. Кроме того, из любого города в любой другой можно долететь, совершив четное число перелетов. При каком наименьшем натуральном d из любого города можно гарантированно долететь в любой другой, совершив четное число перелетов, не превосходящее d?

3. На столе лежит кучка из N спичек. Двое по очереди берут из неё любое число спичек, являющееся полным квадратом. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Докажите, что существует бесконечно много натуральных N, для которых у второго игрока есть выигрышная стратегия.

4. Последовательность a_n задана условиями $a_1 = 2$, $a_n = 2^{a_{n-1}} + 2$ при всех $n \geqslant 2$. Докажите, что a_n делится на a_{n-1} при всех $n \geqslant 2$.

5. Найдите все пары натуральных x и y, для которых

$$[x-1, y-1] + [x+1, y+1] = 2[x, y].$$

6. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$. Точки I_D, I_C, I_B, I_A — центры вписанных окружностей треугольников ABC, ABD, ACD и BCD соответственно. Докажите, что $I_AI_BI_CI_D$ — прямоугольник.