

## Серия 16. Разнобой.

1. В колоде  $2^n - 1$  карт. Ее тасуют следующим образом: верхние  $2^{n-1}$  и нижние  $2^{n-1} - 1$  смешиваются через 1, сохраняя порядок (верхняя карта при этом остается на месте). Через сколько таких операций колода придет в первоначальное положение?

2. Доска  $(2m+1) \times (2n+1)$  ( $m, n \geq 1$ ) раскрашена в белый и чёрный цвет. Назовём клетку доминируемой строкой (столбцом), если более половины клеток этой строки (столбца) такого же цвета. Найдите наименьшее количество клеток, доминируемых одновременно и строкой и столбцом.

3. На доске в некотором порядке написаны числа  $1, 2, 3, \dots, 2018$ . К каждому числу прибавили номер места, на котором оно стоит. Докажите, что получатся либо два равных числа, либо два числа, различающихся на 2018.

4. На окружности  $\omega$  с центром в точке  $O$  и радиусом  $R$  выбраны точки  $A$  и  $B$  такие, что  $R < AB < 2R$ . Окружность  $\omega_1$  с центром в точке  $A$  радиуса меньше  $R$  пересекает окружность  $\omega$  в точках  $C$  и  $D$ , причем  $C$  лежит на меньшей дуге  $AB$ . Касательные, проведенные из точки  $B$  к окружности  $\omega_1$ , касаются ее в точках  $E$  и  $F$ , причем  $E$  лежит вне окружности  $\omega$ . Пусть  $M$  — пересечение прямых  $EC$  и  $DF$ . Докажите, что четырехугольник  $BCFM$  вписанный.

5. Найдите все многочлены  $P(x)$  с действительными коэффициентами, удовлетворяющие условию

$$(x^2 - 6x + 8)P(x) = (x^2 + 2x)P(x - 2)$$

при любых действительных  $x$ .

6. Обозначим за  $P_k(n)$  произведение всех делителей  $n$ , которые кратны  $k$ . Докажите, что  $P_1(n)P_2(n)\dots P_n(n)$  — точный квадрат для всех натуральных  $n$ .