

Серия 15. Разнобой.

1. Неотрицательные числа x, y, z удовлетворяют условию $xy + yz + zx = 3$. Докажите, что

$$x(2 - y^2)(2 - z^2) + y(2 - z^2)(2 - x^2) + z(2 - x^2)(2 - y^2) \leq 3.$$

2. Даны точки A и B . По одну сторону от прямой AB отметили 6 точек так, что шесть треугольников, вершинами которых являются точки A и B , а также одна из отмеченных точек, подобны. Докажите, что 6 отмеченных точек лежат на одной окружности.

3. Внутри выпуклого четырёхугольника $ABCD$ расположены четыре окружности одного радиуса так, что они имеют общую точку и каждая из них вписана в один из углов четырёхугольника. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ вписанный.

4. Существуют ли две такие функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, что $f(g(x)) = x^2$, а $g(f(x)) = x^3$ для всех действительных x ?

5. Петя загадал три числа. После чего сообщил Васе их сумму, сумму квадратов и сумму четвёртых степеней. По этим данным восстановить числа оказалось невозможно. Чему может быть равна сумма этих чисел?

6. В множестве A n элементов. Для каждой пары его подмножеств (A_1, A_2) найдем количество элементов в $A_1 \cap A_2$. Что получится, если сложить все такие числа?

7. Известно, что некоторые сенаторы между собой в ссоре. Проверено, однако, что как бы мы не посадили их всех или любую группу (3 или более) из них по кругу, найдется пара соседей не в ссоре. Весь сенат усадили за круглый стол. Если два соседа не в ссоре, они могут поменяться местами. Докажите, что сенаторы могут расположиться в любом круговом порядке (порядки, полученные поворотом, не различаются).

8. В игре "Десант" две армии захватывают страну. Они ходят по очереди, каждым ходом занимая один из свободных городов. Первый свой город армия захватывает с воздуха, а каждым следующим ходом она может захватить любой город, соединённый дорогой с каким-нибудь уже занятым этой армией городом. Если таких городов нет, армия прекращает боевые действия (при этом, возможно, другая армия свои действия продолжает). Найдётся ли такая схема городов и дорог, что армия, ходящая второй, сможет захватить более половины всех городов, как бы ни действовала первая армия? (Число городов конечно, каждая дорога соединяет ровно два города.)