Решения задач олимпиады

1. НОД$(a, a+5)$ делит также и разность $(a+5)-a=5 \Rightarrow$ НОД$(a, a+5)=1$ или 5. НОД $(a, a+5)=5 \Leftrightarrow a$ делится на $5 \Leftrightarrow$ НОК $(a, a+5)$ делится на 5. Аналогично все для НОД$(b, b+5)$.

Но мы знаем, что НОК $(a, a+5)=$ НОК $(b, b+5)$, значит, либо НОД$(a, a+5)=$ НОД $(b, b+5)=5$, либо НОД $(a, a+5)=$ НОД $(b, b+5)=1$. Произведение двух натуральных чисел равно произведению их НОД и НОК. Поэтому в первом случае НОК$(a, a+5)=a(a+5)/5=$ НОК$(b, b+5)=b(b+5)/5$, а во втором случае НОК$(a, a+5)=a(a+5)=$ НОК$(b, b+5)=b(b+5)$. В любом случае $a(a+5)=b(b+5)$. Отсюда $a=b$ (если, например, $a<b$, то $a+5<b+5$ и $a(a+5)<b(b+5)$ - противоречие).

2. Ответ: да, могло.

Пример:

Аня: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11 - 9 слов, 9 очков

Боря: 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11 - 8 слов, 10 очков

Вася: 3, 4, 5, 12, 13, 14, 15 - 7 слов, 11 очков

Комментарий. Как придумать такой пример? Можно действовать так. Сначала как-нибудь добьемся того, чтобы у Ани было больше всех слов, у Васи меньше всех, и у Ани было меньше очков, чем у Бори (в примере выше мы этого добились с помощью слов 1 - 7). Теперь надо, чтобы Вася обогнать Аню и Борю по очкам. Добавим каждому одинаковое число слов: Ане и Боре добавляем одни и те же слова, а Васе добавляем уникальные слова. Так мы ничего не испортим, а Вася обгонит Аню и Борю.

3. Ответ: все четные n.

Докажем, что если n нечетно, то разбить нельзя. Допустим, что разбили так, что в каждой группе одно число равно среднему арифметическому других. Тогда сумма чисел в каждой группе равна учетверенному этому числу. Значит, сумма всех числе от 1 до $4n$ делится на 4. Но $1+2+\cdots+4n=2n(4n+1)$, это не делится на 4 при нечетном n.

Пусть теперь n четно. Разобьем числа от 1 до $4n$ на восьмерки подряд идущих. Каждая восьмерка имеет вид $8k+1, 8k+2, \ldots, 8k+8$, где k натуральное. Теперь разобьем все восьмерки на две группы по 4 числа вот таким образом: $8k+1, 8k+3, 8k+4, 8k+8$ и $8k+2, 8k+5, 8k+6, 8k+7$. В этих группах $8k+4$ и $8k+5$ - средние арифметические трех других чисел, поэтому мы получили требуемое разбиение.

4. Пусть прямые KE и KD пересекают прямую AC в точках M и N соответственно. Из условия треугольники CBE и CME симметричны относительно CE, значит, $\angle KMC=\angle B$. Аналогично, $\angle KNA=\angle B$, т. е. треугольник MKN — равнобедренный. Кроме того, $BE=ME$ и EC — биссектриса угла MEB. Значит, EC — серединный перпендикуляр к отрезку BM, следовательно, I — центр окружности, описанной около MBN. Но тогда I лежит на серединном перпендикуляре к отрезку MN. Отсюда следует утверждение задачи.

5. *Перво решение.* Докажем, что Вася достигнет максимума, если поступит следующим образом: в первой паре - первая слева красная точка и первая справа синяя, во второй паре — вторая слева красная и вторая справа синяя, и т.д. Для этого соединим точки в каждой паре отрезком и сосчитаем, сколько из этих отрезков покрывают отрезок A_kA_{k+1} (где $A_1, \ldots, A_{2018}$ - это наши точки слева направо). Пусть $k \leqslant 1009$, и среди точек $A_1, \ldots, A_k$ ровно l красных. Тогда справа от точки A_k не менее l синих точек (если меньше, то среди $A_1, \ldots, A_k$ больше, чем $1009-l$ синих, и $k>1009$). Следовательно, все отрезки, красные концы которых находятся среди точек $A_1, \ldots, A_k$, покрывают отрезок A_kA_{k+1}. То же верно с заменой красных концов на синие. То есть отрезок A_kA_{k+1} покрыт k отрезками, а большим числом он и не может быть покрыт. Аналогично, при $k>1009$ отрезок A_kA_{k+1} покрыт $2018-k$ отрезками, и не может быть покрыт большим числом отрезков. Следовательно, сумма, ́ достигнутая Васей, равна $1+2+\ldots+1008+1009+1008+\ldots+2+1$ и не зависит от раскраски.

Набросок второго решения. Сначала разберемся со случаем, когда у нас не 2018 точек, а всего четыре. Перебором убеждаемся, что максимум не зависит от раскраски (тут всего три принципиально разных случая: ККСС, КСКС и КССК, остальные получаются из этих симметрией и переименовыванием цветов).

Теперь у нас 2018 точек. Пусть A и B - красная и синяя точки, а находится в паре с синей точкой C, B находится в паре с красной точкой D. Сделаем *флип*: поменяем местами A и B. Тогда мы сможем переразбить точки A, B, C D на пары так, чтобы сумма расстояний получилась не меньше, чем до этого (в силу случая с 4-мя точками). Значит, после флипа максимум не уменьшился. Аналогично, если поменять местами A и B обратно, максимум тоже не уменьшится. Но это значит, что после флипа максимум не изменился! Теперь скажем, что все раскраски получаются друг из друга такими флипами, поэтому максимум один и тот же для всех раскрасок.