Алгебра с комбинаторной начинкой

Учимся говорить

1. **(a)** Докажите, что $\frac{(d_1+d_2+\ldots+d_m)!}{d_1!d_2!\ldots d_m!}$ - целое число.
(b) Докажите, что для любого натурального n число C_{2n}^{n} делится на $n+1$.

2. **(a)** Рассмотрим пути на клетчатом квадрате $n\times n$ из вершины $(0,0)$ в вершину (n,n), идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика.*
Последовательность из n закрывающихся и n открывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся.
Установите биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.
(b) Постройте какую-нибудь биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого $(n+2)$-угольника диагоналями на треугольники.
(c) Докажите, что число путей из (0,0), которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из (0,0) в $(n-1,n+1)$. Найдите отсюда число путей Дика. Это число обозначается C_n и называется n-м *числом Каталана.*

3. Найдите сумму
$$(\mathrm{C}_n^0)^2+(\mathrm{C}_n^1)^2+\ldots+(\mathrm{C}_n^n)^2.$$

4. **(a)** Сколько существует последовательностей из букв А и Б длины n, в которых никакие две буквы Б не стоят рядом?
(b) Пользуясь предыдущим пунктом, найдите сумму
$$\mathrm{C}_{n+1}^0+\mathrm{C}_n^1+\mathrm{C}_{n-1}^2+\ldots$$

5. **(a)** Найдите сумму $\mathrm{C}_n^1+2\mathrm{C}_n^2+\ldots+n\mathrm{C}_n^n$.
Подсказка. Здесь написана сумма по всем подмножествам n-элементного множества числа элементов в подмножестве. Можно на это смотреть так: мы пробегаем все подмножества, и у каждого по разу считаем все его элементы. Сколько же мы так насчитаем? Та же подсказка другими словами: сколько есть способов выбрать из n человек команду (произвольного размера) и в этой команде выбрать капитана?
(b) Найдите сумму $\mathrm{C}_n^1+4\mathrm{C}_n^2+9\mathrm{C}_n^3+\ldots+n^2\mathrm{C}_n^n$.

6. Докажите, что при $n>1$ выполняется равенство
$$\mathrm{C}_n^1-2\mathrm{C}_n^2+\ldots+(-1)^{n+1}n\mathrm{C}_n^n=0.$$

7.* Последовательность функций задана следующим образом:

$$Q_1(x) = x, \quad Q_{n+1}(x) = \frac{Q_n(x+1)}{Q_n(x)}$$

Пусть

$$Q_n(x) - 1 = \frac{A(x)}{B(x)},$$

где $A(x), B(x)$ — многочлены.

(a) Найдите степень многочлена $A(X)$.

(b) Найдите старший коэффициент многочлена $A(x)$.

Учимся писать

8. Установите биекцию между путями Дика и способами заполнить таблицу $2 \times n$ числами от 1 до $2n$ так, чтобы в кажой строке и в каждом столбце числа шли по убыванию.

9. **(a)** Докажите, что число $\frac{(2m)!(2n)!}{m!n!(m+n)!}$ целое.

(b*) Попробуйте придумать какую-нибудь комбинаторную интерпретацию этого числа.