

## Алгебра с комбинаторной начинкой

### Учимся говорить

1. Придумайте комбинаторное доказательство тождества  $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$
2. (а) Пусть  $p$  простое,  $0 < k < p$ . Докажите, что  $C_p^k$  делится на  $p$ .  
(б) Докажите, что  $\frac{(d_1+d_2+\dots+d_m)!}{d_1!d_2!\dots d_m!}$  - целое число.  
(с) Докажите, что для любого натурального  $n$  число  $C_{2n}^n$  делится на  $n + 1$ .

3. (а) Рассмотрим пути на клетчатом квадрате  $n \times n$  из вершины  $(0, 0)$  в вершину  $(n, n)$ , идущие только вверх и вправо и не поднимающиеся выше диагонали квадрата. Такие пути называются *путями Дика*.

Последовательность из  $n$  закрывающихся и  $n$  открывающихся скобок называется *правильной скобочной последовательностью*, если в любом её начальном куске открывающихся скобок не меньше, чем закрывающихся.

Установите биекцию между путями Дика и правильными скобочными последовательностями.

(б) Постройте какую-нибудь биекцию между путями Дика и разбиениями выпуклого  $(n + 2)$ -угольника диагоналями на треугольники.

(с) Докажите, что число путей из  $(0, 0)$ , которые поднимаются выше диагонали, равно числу всех путей из  $(0, 0)$  в  $(n - 1, n + 1)$ . Найдите отсюда число путей Дика. Это число обозначается  $C_n$  и называется  $n$ -м *числом Каталана*.

4. Найдите сумму

$$C_n^0 C_n^n + C_n^1 C_n^{n-1} + \dots + C_n^n C_n^0.$$

5. (а) Сколько существует последовательностей из букв А и Б длины  $n$ , в которых никакие две буквы Б не стоят рядом?  
(б) Пользуясь предыдущим пунктом, найдите сумму

$$C_{n+1}^0 + C_n^1 + C_{n-1}^2 + \dots$$

6. (а) Найдите сумму  $C_n^1 + 2C_n^2 + \dots + nC_n^n$ .

*Подсказка.* Здесь написана сумма по всем подмножествам  $n$ -элементного множества числа элементов в подмножестве. Можно на это смотреть так: мы пробегаем все подмножества, и у каждого по разу считаем все его элементы. Сколько же мы так насчитаем? Та же подсказка другими словами: сколько есть способов выбрать из  $n$  человек команду (произвольного размера) и в этой команде выбрать капитана?

(б) Найдите сумму  $C_n^1 + 4C_n^2 + 9C_n^3 + \dots + n^2 C_n^n$ .

7. Докажите, что при  $n > 1$  выполняется равенство

$$C_n^1 - 2C_n^2 + \dots + (-1)^{n+1} n C_n^n = 0.$$

## Учимся писать

8. Установите биекцию между путями Дика и способами заполнить таблицу  $2 \times n$  числами от 1 до  $2n$  так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце числа шли по убыванию.
9. Пусть  $p$  - простое. Сколькими способами можно покрасить карусель из  $p$  вагончиков в  $a$  цветов, если одинаковыми считаются раскраски, отличающиеся поворотом? Выведите отсюда малую теорему Ферма. (напомним, малая теорема Ферма утверждает, что  $a^p - a$  делится на  $p$ )