Прыжки по кругу

1. По кругу расположены n луночек, в одной из которых лежит мина. Питирим и кузнечик играют в следующую игру. В начале игры кузнечик запрыгивает в одну из луночек. Далее за каждый ход Питирим называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а кузнечик прыгает на k луночек по часовой либо против часовой стрелки на свой выбор. При каких n Питирим сможет взорвать кузнечика? И Питирим, и кузнечик знают расположение мины.

2. Даны натуральные n и k, $k < n$. Имеются красные и синие бусинки. Составляется круговое ожерелье из n бусинок. Ожерелье называется *счастливым*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно $k - 1$ бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в счастливом ожерелье?

3. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа от 1 до n так, что все расстояния между парами чисел, отличающимися на 1, одинаковые. Известно, что в трех подряд идущих вершинах стоят числа 179, 57, 1514. Найдите n.

4. Даны натуральные n и k, $k < n$. В фирме работают n сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым k сотрудникам. При каких n и k он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

5. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n - 1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n - 1$ по часовой стрелке **в некотором** порядке. При каких n кузнечик сможет посетить все отмеченные точки?

6. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n - 1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n - 1$ по часовой стрелке **в указанном** порядке. При каких n кузнечик побывает во всех отмеченных точках?

7. На плоскости нарисован квадрат. Для каждой точки X вне квадрата определим операцию *отражения относительно квадрата* следующим образом. Рассмотрим наименьший угол с вершиной X, содержащий квадрат, и отразим X относительно наиболее удаленной от X общей точки квадрата и левого луча рассматриваемого угла (эта система называется *внешним бильярдом*). *Порядком* точки назовем наименьшее число отражений относительно квадрата, необходимое для того, чтобы точка вернулась на свое место. Обозначим $S(n)$ площадь множества точек порядка n. Докажите, что **(a)** $S(4) \geqslant 4$; **(b)** $S(8) \geqslant 8$. **(c)** Для каждого натурального n найдите $S(n)$.

Письменная задача

8. Петя как-то занумеровал вершины правильного n-угольника числами от 1 до n. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины, если **(a)** $n = 1001$; **(b)** $n = 2018$?

[ЦПМ, кружок по математике, 8 класс] Убегающие
[*2017–2018*] *20 января 2018*

Прыжки по кругу

1. По кругу расположены n луночек, в одной из которых лежит мина. Питирим и кузнечик играют в следующую игру. В начале игры кузнечик запрыгивает в одну из луночек. Далее за каждый ход Питирим называет натуральное число k (числа k могут отличаться на разных ходах), а кузнечик прыгает на k луночек по часовой либо против часовой стрелки на свой выбор. При каких n Питирим сможет взорвать кузнечика? И Питирим, и кузнечик знают расположение мины.

2. Даны натуральные n и k, $k < n$. Имеются красные и синие бусинки. Составляется круговое ожерелье из n бусинок. Ожерелье называется *счастливым*, если в нем нет двух красных бусинок, между которыми ровно $k - 1$ бусинок. Какое наибольшее количество красных бусинок может быть в счастливом ожерелье?

3. В вершинах правильного n-угольника расставлены числа от 1 до n так, что все расстояния между парами чисел, отличающимися на 1, одинаковые. Известно, что в трех подряд идущих вершинах стоят числа 179, 57, 1514. Найдите n.

4. Даны натуральные n и k, $k < n$. В фирме работают n сотрудников, зарплата каждого из которых выражается натуральным числом рублей. Каждый месяц начальник поднимает зарплату на 1 рубль некоторым k сотрудникам. При каких n и k он сможет сделать все зарплаты равными вне зависимости от начального распределения зарплат?

5. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n - 1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n - 1$ по часовой стрелке **в некотором** порядке. При каких n кузнечик сможет посетить все отмеченные точки?

6. Окружность длины n разделена точками на n равных дуг. Кузнечик начинает прыгать с некоторой точки и делает $n - 1$ прыжков: на 1, на 2, …, на $n - 1$ по часовой стрелке **в указанном** порядке. При каких n кузнечик побывает во всех отмеченных точках?

7. На плоскости нарисован квадрат. Для каждой точки X вне квадрата определим операцию *отражения относительно квадрата* следующим образом. Рассмотрим наименьший угол с вершиной X, содержащий квадрат, и отразим X относительно наиболее удаленной от X общей точки квадрата и левого луча рассматриваемого угла (эта система называется *внешним бильярдом*). *Порядком* точки назовем наименьшее число отражений относительно квадрата, необходимое для того, чтобы точка вернулась на свое место. Обозначим $S(n)$ площадь множества точек порядка n. Докажите, что **(a)** $S(4) \geqslant 4$; **(b)** $S(8) \geqslant 8$. **(c)** Для каждого натурального n найдите $S(n)$.

Письменная задача

8. Петя как-то занумеровал вершины правильного n-угольника числами от 1 до n. Вася первым ходом ставит фишку в какую-то из вершин. Каждым последующим ходом он может передвинуть фишку из вершины A в вершину B, если между ними не больше 9 других вершин и число в B больше числа в A. Какое наибольшее количество вершин гарантированно сможет посетить Вася, как бы Петя ни нумеровал вершины, если **(a)** $n = 1001$; **(b)** $n = 2018$?