Делители и суммы делителей

Учимся говорить

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $\tau(n)$ число натуральных делителей числа n. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n.

1. Пусть p, q - различные простые числа. Посчитайте: **(a)** $\tau(pq)$ **(b)** $\tau(pq^3)$ **(c)** $\tau(p^n q^n)$ **(d)** Как посчитать $\tau(n)$, зная разложение n на простые множители? Выведите явную формулу.

2. Дано натуральное n. Оно имеет ровно два различных простых делителя. Его квадрат имеет
(a) 15;
(b) 81 делителей.
Сколько делителей может иметь само число n?

3. Докажите, что $\tau(n) \leqslant 2\sqrt{n}$

4. **(a)** Найдется ли натуральное число, большее 20172017, все натуральные делители которого можно разбить на две группы с одинаковыми суммами?
(b) Найдется ли натуральное число, большее 20172017, все натуральные делители которого можно разбить на две группы с одинаковым количеством делителей и суммой делителей?

5. **(a)** Докажите, что функция $\tau(n)$ мультипликативна.
(b) Докажите, что функция $\sigma(n)$ тоже мультипликативна.
(c) Выведите явную формулу, вычисляющую $\sigma(n)$ через разложение n на простые множители.
Мультипликативность означает, что для любых взаимно простых m и n $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ и $\sigma(nm) = \sigma(m)\sigma(n)$.

Определение. Натуральное число называется совершенным, если сумма его собственных делителей (т. е. всех без самого числа) равна самому числу.
Первые два совершенных числа - это 6 и 28.
А как будет звучать определение совершенного числа в терминах функции $\sigma(n)$?

6. **(a)** Докажите, что если число $2^p - 1$ простое, то число $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ совершенное.
(b*) Докажите, что любое четное совершенное число имеет вид $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где $2^p - 1$ - простое.
(c) Докажите, что все четные совершенное числа, кроме 6, имеют остаток 1 по модулю 9. В этом пункте можно пользоваться предыдущим.
(d) Докажите, что если совершенное число нечетно, то оно не является точным квадратом.
Существуют ли на самом деле нечетные совершенные числа, неизвестно.

7. На Великой Китайской стене написаны все натуральные числа от 9000000 до 12000000. Катя выбрала у каждого из выписанных чисел собственный делитель. Докажите, что найдется делитель, который Катя выбрала хотя бы два раза.

Учимся писать

8. Найдите все натуральные n, такие что $n \vdots 30$ и $\tau(n) = 30$.

9. Дано натуральное число n. Известно, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех делителей n делится на 24.