

Делители и суммы делителей

Учимся говорить

Пусть n — натуральное число. Обозначим через $\tau(n)$ число натуральных делителей числа n . Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n .

1. Докажите, что $\tau(n) \leq 2\sqrt{n}$
2. Как посчитать $\tau(n)$, зная разложение n на простые множители?
3. Даны два натуральных числа m и n . Известно, что сумма всех делителей числа m равна сумме всех делителей числа n (в сумму делителей входят 1 и само число). Также сумма всех чисел, обратных к делителям m , равна сумме всех чисел, обратных к делителям n . Докажите, что $m = n$.
4. (а) Найдется ли натуральное число, большее 20172017, все натуральные делители которого можно разбить на две группы с одинаковыми суммами?
(б) Найдется ли натуральное число, большее 20172017, все натуральные делители которого можно разбить на две группы с одинаковым количеством делителей и суммой делителей?
5. Докажите, что функции $\tau(n)$ и $\sigma(n)$ мультипликативны. Напомним, мультипликативность означает, что для любых взаимно простых m и n $\tau(mn) = \tau(m)\tau(n)$ и $\sigma(mn) = \sigma(m)\sigma(n)$.

Определение. Натуральное число называется совершенным, если сумма его собственных делителей (т. е. всех без самого числа) равна самому числу.

Первые два совершенных числа — это 6 и 28.

А как будет звучать определение совершенного числа в терминах функции $\sigma(n)$?

6. (а) Докажите, что если число $2^p - 1$ простое, то число $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$ совершенное.
(б) Докажите, что любое четное совершенное число имеет вид $2^{p-1} \cdot (2^p - 1)$, где $2^p - 1$ — простое.
Существуют ли нечетные совершенные числа, неизвестно.
7. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде разности двух натуральных чисел, имеющих поровну простых делителей.
8. На Великой Китайской стене написаны все натуральные числа от $9 \cdot 10^k$ до $12 \cdot 10^k$ (k — натуральное). Катя выбрала у каждого из выписанных чисел собственный делитель. Докажите, что найдется делитель, который Катя выбрала хотя бы два раза.

Учимся писать

9. Дано натуральное число n . Известно, что $n + 1$ делится на 24. Докажите, что сумма всех делителей n делится на 24.
10. Пусть n — натуральное число, d и d' — два его делителя, $d < d'$. Докажите неравенство: $d' > d + d^2/n$.