Стартовая олимпиада. Решения.

1. Какое наименьшее количество точек на плоскости надо взять, чтобы среди попарных расстояний между ними встретились числа $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$?

Решение: Ответ: 8 точек.

Пример. Расставим 8 точек $A_1, A_2, \ldots, A_8$ в этом порядке вдоль прямой так, чтобы расстояние между A_{k-1} и A_k было равно 2^k при всех $k = 2, 3, \ldots, 8$. Очевидно, что такая расстановка точек удовлетворяет условию задачи.

Оценка. Предположим, что можно обойтись не более чем 7 точками. Соединим пары точки, находящиеся на расстояниях $1, 2, 4, \ldots, 64$, отрезками (если какое-то из этих расстояний встречается несколько раз, то лишь одну пару точек соединяем отрезком). Имеет граф, в котором ровно 7 рёбер и не более 7 вершин. Тогда в нём найдётся цикл (в противном случае он бы представлял собой объединение одного или нескольких деревьев, и в каждом дереве рёбер было бы меньше, чем вершин).

Рассмотрим наибольшую сторону этого цикла; пусть её длина равна 2^k. По неравенству многоугольника её длина должна быть не больше, чем сумма длин всех остальных сторон этого цикла. Но для степеней числа 2 это свойство выполняться не может, так сумма длин вообще всех проведённых отрезков, меньших чем 2^k, равна $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{k-1} = 2^k - 1$. Противоречие. Значит, точек было не менее 8.

2. На доске нарисован правильный 2017-угольник, вершины которого занумерованы числами $1, 2, \ldots, 2017$. Из картона вырезали такой же правильный 2017-угольник. Можно ли в вершинах картонного 2017-угольника расставить числа $1, 2, \ldots, 2017$ (каждое число по одному разу) так, чтобы при любом наложении 2017-угольников в какой-то вершине оказались равные числа (картонный многоугольник переворачивать нельзя)?

Решение: Занумеруем вершины первого 2017-угольника по порядку, а второго — в противоположном порядке. Тогда вершина вырезанного многоугольника с номером k попадает в вершину с номером $a - k$, где a — фиксированное число на которое мы повернули. (Точнее, речь идет не о самих номерах, а об их остатках от деления на 2017.) Нам нужно выбрать k так, чтобы числа k и $a - k$ давали одинаковые остатки при делении на 2017, то есть чтобы число $2k$ давало такой же остаток, как и a. Легко убедиться, что когда k пробегает все остатки при делении на 2017, то $2k$ тоже пробегает все остатки.

3. Пусть d_1, d_2, d_3 и d_4 — наименьшие различные делители натурального числа n. Оказалось, что $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = n$. Чему могло быть равно n (укажите все варианты)?

Решение: Ответ: $n = 130$.

Предположим, что n нечётно, тогда все d_i также нечётные, но тогда $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$ чётно, противоречие.

Получили, что n чётно, следовательно, $d_2 = 2$ $(d_1 = 1)$, и одно из чисел d_3 и d_4 чётно, а другое нечётно. Если m чётно, то $m^2 \equiv_4 0$, а если m нечётно, то $m^2 \equiv_4 1$. Получаем $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \equiv_4 2$ (у нас ровно 2 чётных и 2 нечётных числа), а значит, n не делится на 4, и, следовательно, $d_3 = p$ нечётное простое число и $d_4 = 2p$ (т.к. d_4 должно быть чётно).

$1^2+2^2+p^2+(2p)^2 = 5(1+p^2)$ значит n делится на 5 и следовательно $p = 5$. Проверяем: $1^2+2^2+5^2+10^2 = 130$, это нам подходит.

4. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Докажите, что $\frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b} \geq \sqrt{3}$.

Решение: Докажем лемму: $x^2 + y^2 + z^2 \geq xy + yz + xz$, домножим обе части на 2 и перенесём в одну сторону $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2yz - 2xz = (x-y)^2 + (x-z)^2 + (y-z)^2 \geq 0$ квадраты неотрицательны, следовательно лемма доказана.

Пусть $S = \frac{ab}{c} + \frac{bc}{a} + \frac{ac}{b}$, тогда $S^2 = (\frac{ab}{c})^2 + (\frac{bc}{a})^2 + (\frac{ac}{b})^2 + 2a^2 + 2b^2 + 2c^2 \geq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2 = 3$ (мы возпользовались леммой). Следовательно, $S \geq \sqrt{3}$.

5. Вся плоскость разбита тремя сериями параллельных прямых на равные между собой равносторонние треугольники (треугольная решётка). Существуют ли четыре вершины этих треугольников, образующие квадрат?

Решение: Пусть $ABCD$ — квадрат, образованный какими-то четырьмя вершинами. Построим на AB равносторонний треугольник ABE так, чтобы вершина E лежала внутри квадрата. Поскольку точка E получена из B поворотом на 60° вокруг A, она тоже является вершиной сетки. Аналогично построим вовнутрь квадрата треугольники BCF, CDG и DAH; очевидно, точки E, F, G, H образуют квадрат, сторона, которого меньше AB в определенное число раз. Повторив эту конструкцию еще раз, получим еще один квадрат с вершинами в точках сетки, сторона которого меньше EF в то же число раз, и т. д. Но сторона квадрата не может быть меньше, чем сторона треугольника. Противоречие.

6. В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены дорогами, причём между каждыми двумя городами существует единственный несамопересекающийся путь по дорогам. Известно, что в стране ровно 100 городов, из которых выходит по одной дороге. Докажите, что можно построить 50 новых дорог так, что после этого даже при закрытии любой дороги можно будет из каждого города попасть в любой другой.

Решение: Рассмотрим граф, вершины которого соответствуют городам, а рёбра – дорогам. В этом графе между каждыми двумя вершинами есть единственный путь, следовательно, в нем нет циклов (дерево). По условию, в этом графе есть 100 вершин, из которых выходит ровно одно ребро (висячие вершины) — пусть это вершины $A_1, A_2, \ldots, A_{100}$.

Для каждой пары висячих вершин A_i и A_j существует единственный путь между ними, назовём количество рёбер на этом пути расстоянием между этими вершинами и будем обозначать через $d(A_i, A_j)$.

Из конечности числа способов разбить эти 100 вершин на 50 пар следует, что при одном из способов достигается максимум суммы расстояний между вершинами в парах. Соединим пары вершин при этом разбиении 50 новыми рёбрами (остальные рёбра будем называть старыми). Мы докажем, что после этого даже при удалении любого ребра сохраняется связность графа.

Предположим противное, пусть при удалении ребра между вершинами B и C граф распался на две компоненты. Ясно, что удалённое ребро было старым, а вершины B и C принадлежат разным компонентам. В каждой части должна быть вершина, из которой выходит ровно одно старое ребро, а каждое новое ребро соединяет две вершины из одной части. Но тогда в одной из частей должно быть новое ребро, соединяющее вершины A_i и A_j, а в другой — соединяющее вершины A_k и A_m. Пути l и L, соединяющие соотвественно A_i с A_k и A_j с A_m, должны содержать ребро BC. Следовательно, путь из A_i в A_j состоит из участка пути l, соединяющего A_i с B, и участка пути L, соединяющего B с A_j. Аналогично, путь из A_k в A_m проходит через точку C. Таким образом, $d(A_i, A_j) + d(A_k, A_m) = d(A_i, A_k) + d(A_j, A_m) - 2$, что противоречит максимальности суммы расстояний в выбранных парах.

7. Дан треугольник ABC, на стороне AC выбрана точка D. Известно, что $\angle ADB = 60^\circ$, и $BD = AC$. Докажите, что $AB + CD > BC$.

Решение: Пусть E такая точка на отрезке BD, что $BE = DC$ и $ED = AD$. В треугольнике ADE $AD = DE$ и $\angle ADE$, следовательно, он равносторонний. Тогда $AE = DE$. Заметим, что $\angle AEB = \angle EDC = 120^\circ$ и $EB = DC$. Треугольники AEB и EDC равны по двум сторонам и углу между ними, следовательно, $AB = EC$. Тогда по неравенсту треуголника $AB + CD = EC + BE \geq BC$, что и требовалось доказать.