

1. Докажите, что у равнобедренного треугольника биссектриса внешнего угла при вершине параллельна основанию. Верно ли обратное?

2. Через середину  $M$  отрезка с концами на двух параллельных прямых проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что  $M$  — середина  $AB$ .

**Определение.** *Параллелограмм* — это четырёхугольник, противоположные стороны которого параллельны.

3. Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

4. Медианы  $AA_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $G$ . Точки  $P$  и  $Q$  таковы, что четырёхугольники  $BGCP$  и  $BGAQ$  являются параллелограммами.

а) Докажите, что  $PCAQ$  — параллелограмм.

б) Вычислив  $AG : GA_1$  и  $CG : GC_1$ , докажите, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

5. **Средняя линия.** Пусть  $C_1$  и  $A_1$  — соответственно середины сторон треугольника  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ . Проведя через  $C$  прямую, параллельную  $AB$ , докажите, что  $A_1C_1 \parallel AC$  и  $A_1C_1 = \frac{AC}{2}$ .

6. Дан прямоугольник  $ABCD$  и точка  $M$  внутри него. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, стороны которого равны  $MA, MB, MC, MD$ .

7. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $K$  так, что  $AB = CK$ . Точки  $N$  и  $M$  — середины отрезков  $AK$  и  $BC$  соответственно. Отрезки  $NM$  и  $CK$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что  $KN = KP$ .

8. Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно четырёхугольника  $ABCD$ . Известно, что  $BC \parallel AD$  и  $AN = CM$ . Обязательно ли  $ABCD$  — параллелограмм?

9. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в 2 раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

10. Высота  $AH$  треугольника  $ABC$  равна его медиане  $BM$ . На продолжении стороны  $AB$  за точку  $B$  отложена точка  $D$  так, что  $BD = AB$ . Найдите  $\angle BCD$ .

11. На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $AE = 2BF$ . Точка  $G$  такова, что  $F$  — середина отрезка  $EG$ . Докажите, что  $\angle ACG = 90^\circ$ .

12. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB, AC$  и  $BC$  выбраны точки  $D, E$  и  $F$  соответственно так, что  $BF = 2CF, CE = 2AE$  и  $\angle DEF = 90^\circ$ . Докажите, что  $DE$  — биссектриса угла  $ADF$ .

1. Докажите, что у равнобедренного треугольника биссектриса внешнего угла при вершине параллельна основанию. Верно ли обратное?

2. Через середину  $M$  отрезка с концами на двух параллельных прямых проведена прямая, пересекающая эти прямые в точках  $A$  и  $B$ . Докажите, что  $M$  — середина  $AB$ .

**Определение.** *Параллелограмм* — это четырёхугольник, противоположные стороны которого параллельны.

3. Докажите, что выпуклый четырёхугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его диагонали точкой пересечения делятся пополам.

4. Медианы  $AA_1$  и  $CC_1$  треугольника  $ABC$  пересекаются в точке  $G$ . Точки  $P$  и  $Q$  таковы, что четырёхугольники  $BGCP$  и  $BGAQ$  являются параллелограммами.

а) Докажите, что  $PCAQ$  — параллелограмм.

б) Вычислив  $AG : GA_1$  и  $CG : GC_1$ , докажите, что все три медианы треугольника пересекаются в одной точке.

5. **Средняя линия.** Пусть  $C_1$  и  $A_1$  — соответственно середины сторон треугольника  $AB$  и  $BC$  треугольника  $ABC$ . Проведя через  $C$  прямую, параллельную  $AB$ , докажите, что  $A_1C_1 \parallel AC$  и  $A_1C_1 = \frac{AC}{2}$ .

6. Дан прямоугольник  $ABCD$  и точка  $M$  внутри него. Докажите, что существует выпуклый четырёхугольник с перпендикулярными диагоналями, стороны которого равны  $MA, MB, MC, MD$ .

7. На стороне  $AB$  треугольника  $ABC$  отмечена точка  $K$  так, что  $AB = CK$ . Точки  $N$  и  $M$  — середины отрезков  $AK$  и  $BC$  соответственно. Отрезки  $NM$  и  $CK$  пересекаются в точке  $P$ . Докажите, что  $KN = KP$ .

8. Точки  $M$  и  $N$  — середины сторон  $AB$  и  $CD$  соответственно четырёхугольника  $ABCD$ . Известно, что  $BC \parallel AD$  и  $AN = CM$ . Обязательно ли  $ABCD$  — параллелограмм?

9. На двух сторонах треугольника вне его построены квадраты. Докажите, что отрезок, соединяющий концы сторон квадратов, выходящих из одной вершины треугольника, в 2 раза больше медианы треугольника, выходящей из той же вершины.

10. Высота  $AH$  треугольника  $ABC$  равна его медиане  $BM$ . На продолжении стороны  $AB$  за точку  $B$  отложена точка  $D$  так, что  $BD = AB$ . Найдите  $\angle BCD$ .

11. На боковых сторонах  $AB$  и  $BC$  равнобедренного треугольника  $ABC$  отмечены точки  $E$  и  $F$  соответственно так, что  $AE = 2BF$ . Точка  $G$  такова, что  $F$  — середина отрезка  $EG$ . Докажите, что  $\angle ACG = 90^\circ$ .

12. В треугольнике  $ABC$  на сторонах  $AB, AC$  и  $BC$  выбраны точки  $D, E$  и  $F$  соответственно так, что  $BF = 2CF, CE = 2AE$  и  $\angle DEF = 90^\circ$ . Докажите, что  $DE$  — биссектриса угла  $ADF$ .