7 класс **Зацикливание** 14 октября 2017

1. В поликлинике 100 кабинетов, а работает только один врач. На каждой из дверей поликлиники висит табличка «Врач в кабинете № ...». Врач и правда сидит в одном из кабинетов. Посетитель поликлиники начинает искать врача с первого кабинета, руководствуясь табличками. Обязательно ли посетитель найдет врача? Вернется ли он к первому кабинету? Найдет ли он врача, если все таблички будут различны?

2. Напишем последовательность 2, 0, 1, 7, 0, 8, 6, 1, ... и т.д., в ней каждый новый член равен последней цифре суммы четырех предыдущих. Докажите, что рано или поздно в последовательности встретится кусок **а)** 2, 0, 1, 7; **б)** 4, 9, 5, 4.

3. В стране 16 городов, некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением, в каждый город ровно одна дорога входит и из каждого города ровно одна дорога выходит. В каждом городе находится по автомобилисту. Каждый день каждый автомобилист проезжает одну дорогу. Найдите наименьшее натуральное N такое, что ровно через N дней все автомобилисты будут в тех городах, из которых начинали движение, вне зависимости от того, как именно проложены дороги.

4. Метеорологическая служба Цветочного города следит за погодой уже сто лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи доказали, что погода на следующий день однозначно определяется (по какому-то загадочному принципу) погодой в предыдущие семь дней. Последняя неделя в Цветочном городе была полностью солнечная. Докажите, что в будущем снова встретится полностью солнечная неделя.

5. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

6. В Тридесятом Королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится.

7. Дана последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всех натуральных n. Докажите, что существует число Фибоначчи, делящееся на 2017.

8. По кругу стоят несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

9. На доске написано простое число. Каждую минуту его изменяют: умножают на 2 и либо прибавляют, либо вычитают 1. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.

7 класс **Зацикливание** 14 октября 2017

1. В поликлинике 100 кабинетов, а работает только один врач. На каждой из дверей поликлиники висит табличка «Врач в кабинете № ...». Врач и правда сидит в одном из кабинетов. Посетитель поликлиники начинает искать врача с первого кабинета, руководствуясь табличками. Обязательно ли посетитель найдет врача? Вернется ли он к первому кабинету? Найдет ли он врача, если все таблички будут различны?

2. Напишем последовательность 2, 0, 1, 7, 0, 8, 6, 1, ... и т.д., в ней каждый новый член равен последней цифре суммы четырех предыдущих. Докажите, что рано или поздно в последовательности встретится кусок **а)** 2, 0, 1, 7; **б)** 4, 9, 5, 4.

3. В стране 16 городов, некоторые из них соединены дорогой с односторонним движением, в каждый город ровно одна дорога входит и из каждого города ровно одна дорога выходит. В каждом городе находится по автомобилисту. Каждый день каждый автомобилист проезжает одну дорогу. Найдите наименьшее натуральное N такое, что ровно через N дней все автомобилисты будут в тех городах, из которых начинали движение, вне зависимости от того, как именно проложены дороги.

4. Метеорологическая служба Цветочного города следит за погодой уже сто лет. Они подразделяют погоду на дождливую или солнечную. Метеорологи доказали, что погода на следующий день однозначно определяется (по какому-то загадочному принципу) погодой в предыдущие семь дней. Последняя неделя в Цветочном городе была полностью солнечная. Докажите, что в будущем снова встретится полностью солнечная неделя.

5. Кубик Рубика вывели из исходного состояния некоторой последовательностью поворотов граней. Докажите, что если повторять эту последовательность поворотов достаточно долго, то кубик в конце концов вернется в исходное состояние.

6. В Тридесятом Королевстве у каждого замка и каждой развилки сходятся три дороги. Рыцарь, Любящий Разнообразие, выехал из своего замка и по очереди поворачивает то направо, то налево. Докажите, что его маршрут зациклится.

7. Дана последовательность чисел Фибоначчи: $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ для всех натуральных n. Докажите, что существует число Фибоначчи, делящееся на 2017.

8. По кругу стоят несколько коробочек. Каждая из них может быть пустой или содержать один или несколько шариков. Сначала из какой-то коробочки берутся все шарики и раскладываются по одному по часовой стрелке, начиная со следующей коробочки. На следующем ходу раскладывают шарики из той коробочки, в которую попал последний шарик на предыдущем ходу, и т.д. Докажите, что в какой-то момент повторится начальное расположение шариков.

9. На доске написано простое число. Каждую минуту его изменяют: умножают на 2 и либо прибавляют, либо вычитают 1. Докажите, что когда-нибудь получится составное число.