7 класс **Комбинаторика** 7 октября 2017

1. В роте 100 человек, каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через какое-то время каждый единожды подежурил с каждым?

2. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько (не 200) шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

3. В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться так, что наибольшее записанное на доске число не больше 32? (Доминошка — это прямоугольник из двух клеток.)

4. Бизнесмен заключил с чёртом соглашение: каждый день бизнесмен даёт чёрту одну купюру, а взамен получает любое число купюр, какое захочет, но меньшего достоинства. Другого источника купюр у бизнесмена нет. Докажите, что рано или поздно бизнесмен разорится. (Номиналов купюр существует конечное число; взамен купюры самого маленького номинала бизнесмен ничего не получает.)

5. Четыре бегуна A, B, C и D будут бежать по стадиону, на котором есть 20 параллельных дорожек, пронумерованных от 1 до 20. Организаторы забега называют распределение бегунов по дорожкам *оптимальным*, если между каждой парой бегунов есть по крайней мере 3 пустые дорожки. Сколько существует оптимальных распределений бегунов?

6. Дан клетчатый прямоугольник 9×13. Двое по очереди вырезают из него по линиям сетки квадраты любого размера. Кто не может сделать ход — тот проиграл. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

7. За один ход можно заменить упорядоченную тройку целых чисел (p, q, r) на тройку $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Существует ли целое число k, для которого из тройки $(1, 6, 7)$ можно за конечное число шагов получить тройку $(k, k + 1, k + 2)$?

8. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Настя хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое наибольшее число совпадающих бусинок Настя может гарантированно получить?

9. С какого-то момента директор компании "Не обманешь – не продашь" стал ежемесячно заявлять собранию акционеров, что доход за последние 7 месяцев превосходит расход, а налоговой инспекции — что расход за последние 12 месяцев превосходит доход. Как долго это может продолжаться, если директор не врёт?

10. На плоскости даны шесть точек, все попарные расстояния между которыми различны. Докажите, что существует отрезок с концами в двух точках из этих шести, который в одном треугольнике является наибольшей стороной, а в другом — наименьшей.

7 класс **Комбинаторика** 7 октября 2017

1. В роте 100 человек, каждую ночь дежурят трое. Можно ли так организовать дежурство, чтобы через какое-то время каждый единожды подежурил с каждым?

2. В ряд выложены 200 шаров, из них 100 чёрных и 100 красных, причём первый и последний шары — чёрные. Докажите, что можно убрать с правого края несколько (не 200) шаров подряд так, чтобы красных и чёрных шаров осталось поровну.

3. В каждой клетке доски 8×8 написали по одному натуральному числу. Оказалось, что при любом разрезании доски на доминошки суммы чисел во всех доминошках будут разные. Может ли оказаться так, что наибольшее записанное на доске число не больше 32? (Доминошка — это прямоугольник из двух клеток.)

4. Бизнесмен заключил с чёртом соглашение: каждый день бизнесмен даёт чёрту одну купюру, а взамен получает любое число купюр, какое захочет, но меньшего достоинства. Другого источника купюр у бизнесмена нет. Докажите, что рано или поздно бизнесмен разорится. (Номиналов купюр существует конечное число; взамен купюры самого маленького номинала бизнесмен ничего не получает.)

5. Четыре бегуна A, B, C и D будут бежать по стадиону, на котором есть 20 параллельных дорожек, пронумерованных от 1 до 20. Организаторы забега называют распределение бегунов по дорожкам *оптимальным*, если между каждой парой бегунов есть по крайней мере 3 пустые дорожки. Сколько существует оптимальных распределений бегунов?

6. Дан клетчатый прямоугольник 9×13. Двое по очереди вырезают из него по линиям сетки квадраты любого размера. Кто не может сделать ход — тот проиграл. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

7. За один ход можно заменить упорядоченную тройку целых чисел (p, q, r) на тройку $(r + 5q, 3r - 5p, 2q - 3p)$. Существует ли целое число k, для которого из тройки $(1, 6, 7)$ можно за конечное число шагов получить тройку $(k, k + 1, k + 2)$?

8. Есть два ожерелья, в каждом ожерелье по 100 чёрных и 100 белых бусинок. Настя хочет приложить второе ожерелье к первому (разрешается поворачивать и переворачивать) так, чтобы как можно больше бусинок совпало по цвету. Какое наибольшее число совпадающих бусинок Настя может гарантированно получить?

9. С какого-то момента директор компании "Не обманешь – не продашь" стал ежемесячно заявлять собранию акционеров, что доход за последние 7 месяцев превосходит расход, а налоговой инспекции — что расход за последние 12 месяцев превосходит доход. Как долго это может продолжаться, если директор не врёт?

10. На плоскости даны шесть точек, все попарные расстояния между которыми различны. Докажите, что существует отрезок с концами в двух точках из этих шести, который в одном треугольнике является наибольшей стороной, а в другом — наименьшей.