

1. Можно ли раскрасить все стороны и диагонали правильного 1513-угольника в 1512 цветов так, чтобы из каждой вершины выходили отрезки всех цветов?

Определение. Скажем, что задан *граф*, если задано множество его *вершин* и про любую пару вершин сказано, связаны они *ребром* или нет (будем рассматривать только пары из двух различных вершин). *Степень вершины* — это количество выходящих из неё рёбер. Граф *конечный*, если число вершин в нём конечно.

2. а) Докажите, что среди любых 6 бандитов найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 3 попарно незнакомых бандита.

б) Докажите, что среди любых 9 бандитов найдутся либо 3 попарно знакомых, либо 4 попарно незнакомых бандита.

3. а) Некоторые пары городов соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Обязательно ли найдутся два города, из которых без пересадок можно долететь в одинаковое число городов?

б) Вадим заметил, что у всех его 28 одноклассников различное количество друзей в классе. Сколько у Вадима может быть друзей?

Определение. Граф называется *связным*, если из любой его вершины можно добраться до любой другой по рёбрам.

4. В связном графе у каждой вершины степень равна 2017. После удаления некоторых двух вершин граф перестал быть связным. Докажите, что можно удалить не более 2016 рёбер так, чтобы данный граф также оказался не связным.

5. В метро Готэма у главной станции 239 соседних станций, у специальной станции Брюса Уэйна всего одна соседняя станция, а у всех остальных по 20 соседей. Докажите, что, въехав на бэтмобиле в метро, Брюс сможет доехать до главной станции.

6. В классе готэмской школы учится $n > 1$ девочек. Каждая из них узнала такую новость, что ей необходимо поделиться со всеми одноклассницами. Докажите, что за $2n - 3$ телефонных звонков все девочки могут узнать все новости. (За один звонок две девочки обмениваются всеми новостями, которые они к этому моменту знают.)

7. Назовем бандита *добрым*, если у него менее 10 врагов. Назовем бандита *злым*, если все его враги добрые. Докажите, что злых бандитов в Готэме не больше, чем добрых бандитов.

Определение. Граф называется *полным*, если в нём проведены все возможные рёбра.

8. Все рёбра полного графа раскрашены в два цвета. Докажите, что по рёбрам одного из этих цветов от любой вершины до любой другой существует путь длины не более 3.

9. Среди n рыцарей каждые двое либо друзья, либо враги, причём враги друзей любого рыцаря также и его враги. Известно, что у каждого рыцаря ровно 6 врагов. При каких n такое возможно?

10. Некоторые члены мафиозного клана знакомы между собой, а некоторые нет. Каждый вечер кто-то из клана зовёт всех своих друзей к себе на ужин для обсуждения дел, и в ходе ужина все его друзья знакомятся друг с другом. Оказалось, что после того, как каждый из членов клана устроил хотя бы один ужин, нашлись двое так и не познакомившихся мафиози. Докажите, что и после следующего ужина они не познакомятся.